

Università degli Studi di Firenze
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Anno Accademico 2010-2011

Tesi di Laurea Magistrale

18 Aprile 2012

**RANGO DI TENSORI E
VARIETÀ SECANTI**

Candidato:

Fulvio Gesmundo

Relatore:

Prof. Giorgio Ottaviani

Scherzano molto ma fan cose molto serie.

ARISTOFANE

Indice

1	Nozioni preliminari	1
1.1	Prodotti tensoriali	1
1.2	Richiami di Geometria Algebrica	4
1.3	Varietà di Segre e di Veronese	10
1.4	Join e varietà secanti	12
2	Un metodo induttivo per lo studio delle varietà secanti	15
2.1	I teoremi di subabbondanza e superabbondanza	17
2.2	Conseguenze dei teoremi di subabbondanza e superabbondanza	21
2.3	Varietà difettive	24
3	Il risultato di Lickteig sulle varietà cubiche	29
3.1	Risultati preliminari	29
3.2	Non difettività delle varietà cubiche	37
4	Room e regione di sicurezza	39
4.1	Ricerca di una riduzione proporzionata	41
4.2	Una stima dell'estremo di sicurezza positivo	45
5	Riduzioni con room controllata	47
5.1	Il caso cubico	48
5.2	Un altro caso particolare	51
5.3	Riduzione del numero di fattori	57
6	Il caso $(\mathbb{P}^n)^4$ in dimensione piccola	64
6.1	Casi trattati con il calcolo esplicito	66
6.2	Riduzione dei casi di dimensione più alta	67
7	Considerazioni finali e spunti di approfondimento	76
7.1	Calcolo della regione di sicurezza in dimensione bassa	76
7.2	Un approccio diverso: la programmazione intera	77
A	Raccolta delle tabelle	80
B	Script di Macaulay2	86
	Bibliografia	88

Introduzione

Il problema della decomposizione di tensori trova numerose applicazioni sia in molti settori della matematica, come l'algebra, la geometria e l'analisi numerica, sia in altri campi, come la psicometria e la chemiometria, la trasmissione di segnali, l'analisi di basi di dati e la ricostruzione di immagini.

Introduciamo brevemente il problema: dati k spazi vettoriali di dimensione finita sul campo complesso, ci si propone di determinare una scrittura minimale di un generico elemento ω di T , prodotto tensoriale di tali spazi, come somma di tensori irriducibili, ovvero della forma $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$. Per affrontare questo argomento, studieremo le varietà secanti alla varietà di Segre definita dagli spazi vettoriali considerati; grazie a questo approccio, potremo utilizzare i risultati di geometria algebrica per determinare il più piccolo numero di addendi irriducibili necessari per scrivere qualunque elemento di T . Intuitivamente possiamo infatti interpretare la varietà di Segre come l'insieme dei tensori irriducibili e la sua s -secante come l'insieme dei tensori che possono essere scritti con al più s addendi irriducibili. L'obiettivo sarà determinare il minimo intero r per cui la r -secante satura l'intero spazio ambiente: questo garantisce che ogni tensore di T possa essere scritto come somma di al più r addendi irriducibili.

Il lavoro si ispira in larga misura a [Li1] e [AOP]. Il primo raccoglie i risultati della Tesi di Dottorato di Thomas Lickteig, in cui viene dimostrato un fondamentale risultato che risolve il problema quando si studiano varietà di Segre con tre fattori della stessa dimensione. Il secondo fornisce una tecnica induttiva che permette di ridurre lo studio di varietà di Segre di dimensione alta a quello di varietà di Segre di dimensione più bassa.

In particolare, partendo dai risultati di [AOP], si sviluppano le due nozioni di room e di regione di sicurezza. Si dimostrano alcuni risultati che, in alcuni casi particolari, permettono di determinare in modo immediato la non difettività di alcune varietà secanti.

Uno strumento essenziale nell'impostazione della ricerca è stato il software Macaulay2 (cfr. [GS]), che ha permesso di costruire numerosi esempi e ha offerto spunti importanti a proposito della parte riguardante la regione di sicurezza di una varietà di Segre.

Il primo capitolo richiama alcuni concetti di geometria algebrica e introduce gli strumenti fondamentali che saranno utili in seguito. In questo capitolo viene introdotta la nozione di varietà secante e risulterà chiaro il motivo, qui appena accennato, per cui lo studio delle secanti a una varietà di Segre serve a determinare una scrittura minimale di un tensore in somma di tensori irriducibili.

Nel secondo capitolo si illustra il metodo induttivo trattato in [AOP]. Vengono introdotti notazioni e concetti e presentati alcuni risultati sui quali si fonda il resto del lavoro.

Il terzo capitolo affronta il risultato di Lickteig sulle varietà cubiche. Si segue il percorso tracciato da [Lil], rileggendolo alla luce dei risultati acquisiti.

Il quarto e il quinto capitolo introducono e sviluppano le nozioni di room e di regione di sicurezza, fornendo dei risultati che, in alcuni casi particolari, garantiscono che sia possibile applicare la tecnica induttiva di [AOP] per dimostrare che alcune varietà secanti sono non difettive (cfr. Proposizioni 5.4, 5.8, 5.15).

Nel sesto capitolo si riporta lo studio delle varietà di Segre della forma $(\mathbb{P}^n)^4$, per $n \leq 10$. Si dimostra che tali varietà di Segre non hanno secanti difettive per $n \neq 1$, eccetto al più in due singoli casi in cui non è possibile applicare la tecnica induttiva.

Nell'ultimo capitolo raccogliamo alcuni risultati raggiunti con l'ausilio del software Macaulay2, che permette di calcolare esplicitamente la regione di sicurezza di alcune varietà. Si conclude con alcune congetture e spunti da approfondire. In particolare i risultati raggiunti con il calcolo esplicito evidenziano una interessante simmetria tra gli estremi di sicurezza delle varietà di Segre considerate (cfr. Congettura 7.1).

Vorrei esprimere la mia riconoscenza nei confronti del Prof. Giorgio Ottaviani, che mi ha seguito e sostenuto durante il periodo di preparazione della tesi con un impegno e un interesse unici. Inoltre vorrei ringraziare la mia famiglia e tutti i cari amici che mi sono stati vicini negli ultimi cinque anni.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo capitolo si richiameranno alcune nozioni basilari di algebra tensoriale, per fornire i primi strumenti che saranno utili in seguito. Si daranno alcune definizioni di base e alcuni risultati fondamentali di geometria algebrica; si forniranno le nozioni di dimensione e di spazio tangente ad una varietà algebrica. Verranno infine introdotte le Varietà di Segre e di Veronese e successivamente le nozioni di join e di varietà secante, e i primi risultati necessari per sviluppare il lavoro successivo.

Definizione 1.1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo complesso \mathbb{C} . Indichiamo con V^\vee lo spazio delle applicazioni lineari da V in \mathbb{C} . V^\vee si dice spazio duale di V .

È noto che esiste un isomorfismo (in generale non canonico) tra V e V^\vee . Esiste invece sempre un isomorfismo canonico tra V e $(V^\vee)^\vee$ definito da $v \mapsto \varphi(v)$ dove $\varphi(v)$ è l'applicazione lineare su V^\vee data da: $\varphi(v) : f \mapsto f(v)$.

1.1 Prodotti tensoriali

Definizione 1.2. Siano V_1, \dots, V_k spazi vettoriali di dimensione finita sul campo complesso \mathbb{C} . Definiamo lo spazio $V_1^\vee \otimes \dots \otimes V_k^\vee$, detto prodotto tensoriale $V_1^\vee, \dots, V_k^\vee$, come lo spazio delle applicazioni multilineari da $V_1 \times \dots \times V_k$ in \mathbb{C} . Un elemento $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k \in V_1^\vee \otimes \dots \otimes V_k^\vee$ definisce l'applicazione multilineare data da $(v_1, \dots, v_k) \mapsto \alpha_1(v_1) \dots \alpha_k(v_k)$.

Per dualità si avrà immediatamente che il prodotto tensoriale degli spazi $V_1 \dots V_k$ è lo spazio delle applicazioni multilineari da $V_1^\vee \times \dots \times V_k^\vee$ in \mathbb{C} . Gli elementi di un prodotto tensoriale sono detti tensori.

Esiste un'applicazione naturale, detta prodotto tensore, multilineare, che proietta $V_1 \times \dots \times V_k$ su un sottoinsieme del prodotto tensoriale. L'applicazione è definita come segue:

$$\begin{aligned} \otimes : V_1 \times \dots \times V_k &\longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_k \\ (v_1, \dots, v_k) &\longmapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_k. \end{aligned}$$

Gli elementi immagine di questa applicazione si dicono tensori irriducibili.

La multilinearità dell'applicazione \otimes permette di costruire un isomorfismo canonico Φ da $V_1^\vee \otimes \cdots \otimes V_k^\vee$ in $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)^\vee$ definito sui tensori irriducibili come segue:

$$\Phi(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k) : v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \longmapsto \alpha_1(v_1) \dots \alpha_k(v_k),$$

ed esteso per linearità su $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$.

Inoltre, dati due spazi vettoriali V e W di dimensione finita, si osserva facilmente che lo spazio $\text{Hom}(V, W)$ delle applicazioni lineari da V in W è canonicamente isomorfo a $V^\vee \otimes W$. In particolare questa osservazione permette di dedurre che, dato un qualsiasi spazio vettoriale V , si avrà l'identificazione $V \otimes \mathbb{C} \simeq V$.

Più in generale, dati k spazi vettoriali V_1, \dots, V_k , di dimensione n_1, \dots, n_k rispettivamente, e una partizione $\{A, B\}$ di $\{1, \dots, k\}$, con $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$, $B = \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$, possiamo indicare con $V_A = \bigotimes_{a \in A} V_a$ e con $V_B = \bigotimes_{b \in B} V_b$. È possibile costruire un isomorfismo canonico, detto contrazione sulle coordinate di A , tra $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ e $\text{Hom}(V_A^\vee, V_B)$.

Definiremo questo isomorfismo sui tensori irriducibili di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$; sarà immediato estenderlo per linearità su tutto lo spazio. Si definisce:

$$\begin{aligned} \Psi : V_1 \otimes \cdots \otimes V_k &\longrightarrow \text{Hom}(V_A^\vee, V_B) \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k &\longmapsto \psi_{v_1 \otimes \cdots \otimes v_k} \end{aligned}$$

dove $\psi_{v_1 \otimes \cdots \otimes v_k}$ è l'applicazione definita su V_A^\vee come segue:

$$\begin{aligned} \psi_{v_1 \otimes \cdots \otimes v_k} : V_A^\vee &\longrightarrow V_B \\ \phi &\longmapsto \phi(v_A)v_B, \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove indichiamo con v_A il tensore $\bigotimes_{a \in A} v_a$ e con v_B il tensore $\bigotimes_{b \in B} v_b$

Dato un tensore $\omega \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, l'applicazione $\Psi(\omega)$ si chiama flattening di ω rispetto alle coordinate di A , e viene indicato con $\text{Flat}_{B,A}(\omega)$.

È possibile identificare il flattening di un tensore ω , con una opportuna matrice. Consideriamo le biezioni $\tau_A : \{1, \dots, n_{\alpha_1}\} \times \cdots \times \{1, \dots, n_{\alpha_s}\} \longrightarrow \{1, \dots, \prod_{a \in A} n_a\}$ e $\tau_B : \{1, \dots, n_{\beta_1}\} \times \cdots \times \{1, \dots, n_{\beta_r}\} \longrightarrow \{1, \dots, \prod_{b \in B} n_b\}$, che ordinano i multi-indici lessicograficamente. Dato $\omega = \sum w_{i_1, \dots, i_k} \varepsilon_{i_1, \dots, i_k}$, identificheremo l'applicazione $\text{Flat}_{B,A}(\omega)$ con la matrice definita da:

$$M_{ij} = w_{\tau_A^{-1}(i), \tau_B^{-1}(j)}.$$

Quando l'insieme B è composto da un solo elemento, cioè $B = \{j\}$, indicheremo Flat_j anziché $\text{Flat}_{B,A}$.

Con questa notazione vale il seguente risultato:

Proposizione 1.3. Sia $\omega \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$. Sono equivalenti:

(i) ω è irriducibile.

(ii) il rango di $\text{Flat}_j(\omega)$ è 0 o 1 per ogni $j = 1, \dots, k$.

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii). Sia $\omega = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$. Se $\omega = 0$ allora banalmente $\text{Flat}_j(\omega) = 0$ per ogni j . Sia $\beta \in V_1^\vee \otimes \cdots \otimes V_{j-1}^\vee \otimes V_{j+1}^\vee \otimes \cdots \otimes V_k^\vee$. Si ha:

$$\text{Flat}_j(\omega)(\beta) = \beta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_k)v_j,$$

da cui si deduce che il rango di $\text{Flat}_j(\omega)$ è 1.

(ii) \Rightarrow (i). Se il rango di $\text{Flat}_j(\omega)$ è 0, è immediato che $\omega = 0$. Altrimenti procediamo per induzione su k .

Supponiamo $k = 2$. $\text{Im}(\text{Flat}_1(\omega))$ è un sottospazio 1-dimensionale di V_1 . Sia e_1^1 un suo generatore. Completiamo e_1^1 a $\{e_1^1, \dots, e_1^{n_1}\}$, base di V_1 . Si avrà $\omega = \sum e_1^i \otimes \eta_i$, per opportuni $\eta_1, \dots, \eta_{n_1} \in V_2$. Consideriamo $\beta \in V_2^\vee$: si ha $\text{Flat}_1(\beta) = \sum \beta(\eta_i)v_i$. Poiché $\text{Im}(\text{Flat}_1(\omega))$ è generato da v_1 , per l'arbitrarietà di β si ottiene $\eta_i = 0$ per ogni $i \neq 1$, e quindi ω è irriducibile. Supponiamo ora $k > 2$. Vale comunque che $\text{Im}(\text{Flat}_1(\omega))$ è uno spazio 1-dimensionale di V_1 . Con lo stesso argomento seguito nel caso $k = 2$, si ha che $\omega = v_1 \otimes \eta$, per qualche $\eta \in V_2 \otimes \cdots \otimes V_k$. Si verifica facilmente che anche i flattening di η hanno rango 1, e perciò, per ipotesi induttiva, η è irriducibile. Da questo si ha la tesi. \square

Rango di tensori

Consideriamo $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, prodotto tensoriale di k spazi vettoriali di dimensione finita.

Definizione 1.4. Sia $\omega \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$. Si dice che il rango di ω è r , e si indica $\mathbf{R}(\omega) = r$, se r è il minimo intero per cui esistono Z_1, \dots, Z_r tensori irriducibili di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ tali che $\omega = \sum_{j=1}^r Z_j$.

Definizione 1.5. Sia $\omega \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$. Si dice che il rango-bordo di ω è r , e si indica con $\underline{\mathbf{R}}(\omega) = r$, se r è il minimo intero per cui ω è limite di una successione di tensori di rango r .

È evidente che, per ogni tensore $\omega \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$, vale la disuguaglianza $\underline{\mathbf{R}}(\omega) \leq \mathbf{R}(\omega)$.

Algebre di tensori

Definizione 1.6. Dato uno spazio vettoriale V , e posto $V^{\otimes d}$ il prodotto tensoriale di d copie di V , definiamo l'algebra tensoriale di V come segue:

$$V^{\otimes} = \bigoplus_{d=0}^{\infty} V^{\otimes d}.$$

V^{\otimes} è un'algebra graduata con il prodotto interno indotto da \otimes , definito come segue sui tensori irriducibili e poi esteso per linearità su tutto lo spazio: dati $v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \in V^{\otimes s}, w_1 \otimes \cdots \otimes w_t \in V^{\otimes t}$, definiamo $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_t) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_t$.

Osservazione 1.7. Indichiamo con \mathfrak{S}_d il gruppo simmetrico su d elementi. Esiste un'azione naturale di \mathfrak{S}_d su $V^{\otimes d}$ definita da $\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)}$.

Consideriamo l'applicazione π_S su $V^{\otimes d}$ definita da

$$\pi_S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(d)},$$

ed estesa per linearità su $V^{\otimes d}$

Definizione 1.8. Si definisce la d -esima potenza simmetrica di V come l'immagine di $V^{\otimes d}$ attraverso l'applicazione π_S e si indica con $S^d(V)$.

La somma diretta di tutte le potenze simmetriche di V è detta algebra simmetrica di V e viene indicata con $S^\bullet V = \text{Sym}(V) = \bigoplus_{d \geq 0} S^d(V)$. Il prodotto interno di $\text{Sym}(V)$ è definito da $\omega_1 \circ \omega_2 = \pi_S(\omega_1 \otimes \omega_2)$, $\forall \omega_1, \omega_2 \in \text{Sym}(V)$.

È immediato osservare che $S^d(V)$ coincide con il sottospazio di $V^{\otimes d}$ dei tensori che vengono fissati dall'azione di \mathfrak{S}_d . Inoltre è noto che lo spazio $S^d(V)$ può essere identificato con lo spazio dei polinomi omogenei di grado d su V^\vee (per i dettagli si veda [La]).

Consideriamo l'applicazione π_Λ su $V^{\otimes k}$ definita da

$$\pi_\Lambda(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

ed estesa per linearità su $V^{\otimes k}$.

Definizione 1.9. Si definisce la k -esima potenza alternante di V come l'immagine di $V^{\otimes k}$ attraverso l'applicazione π_Λ e si indica con $\Lambda^k(V)$.

La somma diretta di tutte le potenze alternanti di V è detta algebra esterna di V e viene indicata con $\Lambda^\bullet(V) = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k(V)$. L'operazione di prodotto su $\Lambda^\bullet(V)$ è definita da $\omega_1 \wedge \omega_2 = \pi_\Lambda(\omega_1 \otimes \omega_2)$, $\forall \omega_1, \omega_2 \in \Lambda^\bullet(V)$.

1.2 Richiami di Geometria Algebrica

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} di dimensione finita n . Indicheremo con \mathbb{A}^n la struttura di spazio affine definita da V e con $\mathbb{C}[V]$ l'algebra dei polinomi su V , cioè $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$, dove t_1, \dots, t_n sono le coordinate su V (o su \mathbb{A}^n) rispetto a una base scelta.

Definizione 1.10. Una varietà algebrica affine X di \mathbb{A}^n è un sottoinsieme di \mathbb{A}^n che sia il luogo di zeri per una famiglia di polinomi di $\mathbb{C}[V]$.

Indichiamo con $\mathbb{P}V$ (o più spesso con \mathbb{P}^n) lo spazio proiettivo di V , ossia lo spazio dei sottospazi 1-dimensionali di V , che può essere identificato con il quoziente di $V \setminus \{0\}$ rispetto alla relazione di equivalenza \sim definita da:

$$v \sim w \text{ se e solo se } \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ tale che } v = \lambda w.$$

Dato un qualsiasi sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{P}^n$, definiamo il cono affine sopra X :

$$\mathcal{C}(X) = \{v \in V : [v] \in X\} \cup \{0\} \subseteq V.$$

Ovviamente un polinomio $f \in \mathbb{C}[V]$ non definisce una funzione su $\mathbb{P}V$ in quanto, in generale, $f(\lambda x) \neq f(x)$. Tuttavia, se f è omogeneo di grado d , si ha $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$. Ha quindi senso dire che un polinomio omogeneo f si annulla su un punto $[v]$ di $\mathbb{P}V$, intendendo che si annulla su ogni punto del cono sopra $[v]$, cioè sulla retta di V di direzione v . Inoltre diremo che un polinomio $f \in \mathbb{C}[V]$ si annulla su $[v]$ se tutte le sue componenti omogenee si annullano su $[v]$.

Definizione 1.11. Una varietà algebrica proiettiva X di \mathbb{P}^n è un sottoinsieme di \mathbb{P}^n che sia il luogo di zeri per una famiglia di polinomi omogenei di $\mathbb{C}[V]$.

Si può mostrare che la famiglia delle varietà algebriche affini di \mathbb{A}^n soddisfa gli assiomi dei chiusi per una topologia su \mathbb{A}^n . Questa topologia è detta Topologia di Zariski su \mathbb{A}^n . Una base di aperti per questa topologia è data da aperti della forma $D(f) = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) \neq 0\}$, con $f \in \mathbb{C}[V]$. Analogamente la famiglia delle varietà algebriche proiettive di \mathbb{P}^n definisce una topologia su \mathbb{P}^n .

Definizione 1.12. Sia X una varietà algebrica. Si dice che X è riducibile se esistono due varietà algebriche Y_1, Y_2 , entrambe diverse da X , tali che $X = Y_1 \cup Y_2$. Si dice che X è irriducibile se non è riducibile.

È noto che una varietà algebrica affine X definisce un'ideale in $\mathbb{C}[V]$, che indicheremo con $I(X) = \{f \in \mathbb{C}[V] : f(x) = 0 \forall x \in X\}$. Viceversa un'ideale I di $\mathbb{C}[V]$ definisce una varietà algebrica $Z(I) = \{x \in V : f(x) = 0 \forall f \in I\}$. L'anello quoziente $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[V]/I(X)$ è detto anello delle coordinate di X . Ogni elemento di $\mathbb{C}[X]$ definisce, attraverso il morfismo di valutazione, una funzione su X .

Definizione 1.13. Sia X una varietà algebrica e sia f una funzione definita su un aperto U di X a valori in \mathbb{C} . Dato $p \in U$, si dice che f è regolare in p se esiste un intorno aperto W di p e due elementi $g, h \in \mathbb{C}[V]$, tali che $f = gh^{-1}$ su W . Si dice che una funzione f è regolare sull'aperto U , se è regolare in ogni punto di U .

Richiamiamo un fondamentale risultato di geometria algebrica, noto come Teorema degli Zeri (o Nullstellensatz), per la cui dimostrazione rimandiamo a [F]:

Teorema 1.14 (Nullstellensatz). *Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso e di caratteristica zero. Sia I un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Allora sono equivalenti:*

1. $Z(I) = \emptyset$;
2. $1 \in I$.

Come conseguenza di questo teorema, valgono i fatti seguenti:

- per ogni X varietà affine, $Z(I(X)) = X$;
- per ogni I ideale di $\mathbb{C}[V]$, $I(Z(I)) = \mathfrak{r}(I)$, dove con $\mathfrak{r}(I)$ indichiamo l'ideale radicale di I .

Questi risultati permettono alcune affermazioni relative all'anello delle funzioni regolari. In particolare, si può affermare quanto segue:

- per ogni X varietà affine, l'anello delle funzioni regolari su X corrisponde all'anello delle coordinate $\mathbb{C}[X]$;
- data una varietà X e un aperto $U = D(F) \cap X$ l'anello delle funzioni regolari definite su U corrisponde all'anello $\mathbb{C}[X]_f$, localizzato di $\mathbb{C}[X]$ sull'insieme delle potenze di f , dove f è la classe di F modulo $I(X)$.

Data una varietà algebrica X e una funzione $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^n$ si dice che φ è regolare se ogni sua componente è una funzione regolare su X .

Date due varietà X e Y e un'applicazione regolare $\varphi : X \rightarrow Y$, è noto che φ definisce un omomorfismo di anelli $\varphi^* : \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X]$; viceversa ogni omomorfismo di anelli da $\mathbb{C}[Y]$ a $\mathbb{C}[X]$ definisce un'applicazione regolare da X a Y .

Anche nel caso proiettivo, è noto che una varietà algebrica X definisce un ideale di $\mathbb{C}[V]$, che indichiamo sempre con $I(X)$. Si verifica facilmente che se X è una varietà proiettiva, allora $I(X)$ è un ideale omogeneo. Viceversa, dato un ideale omogeneo I di $\mathbb{C}[V]$, è definita la varietà algebrica proiettiva $Z_{\mathbb{P}}(I) = \{[x] \in \mathbb{P}V : f(x) = 0 \forall f \in I\}$. Si verifica facilmente che $\mathcal{C}(Z_{\mathbb{P}}(I)) = Z(I)$. Anche in questo caso l'anello quoziente $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[V]/I(X)$ è detto anello delle coordinate di una varietà X . Una funzione f si dice regolare se è regolare la sua restrizione agli aperti affini \mathbb{A}^n di \mathbb{P}^n .

Enunciamo un risultato analogo al Nullstellensatz, valido nel caso proiettivo:

Teorema 1.15. *Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso e di caratteristica zero. Sia I un ideale omogeneo di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Allora sono equivalenti:*

1. $Z_{\mathbb{P}}(I) = \emptyset$;
2. $\langle x_1, \dots, x_n \rangle^r \subseteq I$ per qualche intero $r \in \mathbb{N}$.

Dimensione e spazio tangente

Definizione 1.16. Siano A e B due anelli tali che $B \subseteq A$. Sia b un elemento di B . Si dice che b è intero su A se b è radice di un polinomio monico di $A[x]$. L'anello B si dice un anello di interi su A (o un anello integrale su A) se ogni elemento di B è intero su A .

Si può verificare che se l'anello B è finitamente generato su A , allora il fatto che B sia un anello di interi su A è equivalente al fatto che B sia un A -modulo finitamente generato su A .

Definizione 1.17. Siano X e Y varietà affini e sia $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione regolare tale che $f(X)$ è denso in Y . Allora si dice che f è un'applicazione dominante.

È chiaro che se f è dominante, il morfismo $f^* : \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}[X]$, definisce un'immersione di $\mathbb{C}[Y]$ in $\mathbb{C}[X]$.

Data $f : X \rightarrow Y$ dominante, si dice che f è una mappa finita, se $\mathbb{C}[X]$ è un anello di interi su $\mathbb{C}[Y]$.

Osservazione 1.18. Si può verificare che, se f è una mappa finita, allora, per ogni $y \in Y$, l'insieme $f^{-1}(y)$ è finito. Supponiamo infatti che $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e siano t_1, \dots, t_n un sistema di coordinate su \mathbb{A}^n , che definiscono degli elementi di $\mathbb{C}[X]$. È sufficiente osservare che le coordinate assumono solo un numero finito di valori sugli elementi di $f^{-1}(y)$. Infatti, per la finitezza di f , per ogni j , t_j è un intero su $\mathbb{C}[Y]$ e perciò è radice di un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}[Y]$, cioè $t_j^m + \sum_i b_{i,j} t_j^i = 0$, con $b_{i,j} \in \mathbb{C}[Y]$. Consideriamo $y \in Y$ e sia $x \in f^{-1}(y)$. Si ottiene l'equazione

$$(t_j(x))^m + \sum_i b_{i,j}(y)(t_j(x))^i = 0$$

che ha solo un numero finito di radici. Dunque le coordinate assumono solo un numero finito di valori sugli elementi di $f^{-1}(y)$, che quindi è finito.

Nel caso proiettivo, date X, Y varietà algebriche e $f : X \rightarrow Y$ regolare, si dice che f è finita e dominante se ogni punto $y \in Y$, ha un intorno affine U tale che $f^{-1}(U)$ è affine e la restrizione di f a $f^{-1}(U)$ è finita e dominante.

Richiamiamo un fondamentale risultato sulle funzioni finite e dominanti, noto come Teorema di Normalizzazione, che ci permetterà di introdurre la nozione di dimensione di una varietà algebrica. Per la dimostrazione e i dettagli rimandiamo a [Sh].

Teorema 1.19 (Teorema di Normalizzazione). *Sia X una varietà algebrica proiettiva irriducibile. Allora esiste un'applicazione finita e dominante $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$, per qualche $n \in \mathbb{N}$.*

Sia Y una varietà algebrica affine irriducibile. Allora esiste un'applicazione finita e dominante $f : Y \rightarrow \mathbb{A}^m$, per qualche $m \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.20. Sia X una varietà algebrica affine (risp. proiettiva) irriducibile. Si dice che X ha dimensione n se esiste un'applicazione finita e dominante $f : X \rightarrow \mathbb{A}^n$ (risp. $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$).

Sia X una varietà algebrica affine. La dimensione di X è il massimo delle dimensioni delle sue componenti irriducibili.

La definizione di dimensione è ben posta. Infatti l'applicazione $f : X \rightarrow \mathbb{A}^n$ finita e dominante definisce l'immersione f^* di $\mathbb{C}[\mathbb{A}^n]$ in $\mathbb{C}[X]$. Poiché $\mathbb{C}[X]$ è un anello di interi su $\mathbb{C}[\mathbb{A}^n]$ e quest'ultimo è isomorfo all'anello di polinomi in n indeterminate su \mathbb{C} , si ottiene che il grado di trascendenza di $\mathbb{C}[X]$ su \mathbb{C} è esattamente n . Questo caratterizza l'intero n e garantisce che la definizione di dimensione sia ben posta.

A questo punto introduciamo la nozione di spazio tangente ad una varietà affine.

Definizione 1.21. Sia X una varietà affine di \mathbb{A}^n e sia $x \in X$. Consideriamo un sistema di coordinate su \mathbb{A}^n tali che $x = 0$. Dato $a \in \mathbb{A}^n$, $a \neq 0$, una retta L_a per x è il sottoinsieme di \mathbb{A}^n della forma $L_a = \{ta : t \in \mathbb{C}\}$.

Consideriamo l'ideale $I(X) = (F_1, \dots, F_m)$ per opportuni polinomi $F_j \in \mathbb{C}[\mathbb{A}^n]$. L'intersezione $L_a \cap X$ è individuata dalle seguenti equazioni, polinomiali nella indeterminata t :

$$\begin{cases} F_1(ta) = 0 \\ \vdots \\ F_m(ta) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Le soluzioni di questo sistema coincidono con le radici del polinomio $F(t) = \text{MCD}(F_1(ta), \dots, F_m(ta))$. Si osserva facilmente che il polinomio F non dipende dalla scelta dei generatori di $I(X)$ e poiché $0 \in L_a \cap X$, si ha che $t = 0$ è radice di F .

Definizione 1.22. Si dice che una retta L_a è tangente alla varietà X in 0 , se la molteplicità di $t = 0$ come radice del polinomio $F = \text{MCD}(F_1(ta), \dots, F_m(ta))$, dove $I(X) = (F_1, \dots, F_m)$, è maggiore o uguale a 2.

Possiamo dare una caratterizzazione per la retta tangente. Infatti, poiché $0 \in L_a \cap X$, i polinomi F_j hanno termine noto nullo. Si ha quindi:

$$F_j(ta) = tL_j(a) + G_j(ta),$$

dove L_j è la parte lineare di F_j e in G_j compaiono solo termini di grado maggiore o uguale a 2.

Affinché ognuno degli $F_j(ta)$ sia divisibile per t^2 , è necessaria e sufficiente la seguente condizione di tangenza:

$$L_j(a) = 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, m.$$

Generalizziamo quanto appena visto considerando un generico punto $p \in X$. Dato $G \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$, e un punto $p = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{A}^N$, possiamo considerare lo sviluppo di Taylor di G in p :

$$G(t_1, \dots, t_N) = G(p) + G_1(t_1, \dots, t_N) + \dots + G_d(t_1, \dots, t_N),$$

dove, per ogni $j = 1, \dots, d$, G_j è un polinomio omogeneo nelle indeterminate $(t_i - x_i)$. In generale dato $p \in \mathbb{A}^N$ e un vettore a , si potrà definire la retta per p con direzione a come $L = \{p + ta : t \in \mathbb{C}\}$ e si potrà dare la nozione di retta tangente alla varietà X in p con una costruzione analoga a quella fatta nel caso in cui $p = 0$.

Il polinomio omogeneo G_1 nello sviluppo di Taylor di G è chiamato differenziale di G in p e si indica con $d_p G$. Si può verificare facilmente che, $\forall F \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$:

$$d_p F = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial t_i} F(x)(t_i - x_i).$$

Inoltre valgono le seguenti proprietà, dimostrabili per verifica diretta:

$$\begin{aligned} d_p(F + G) &= d_p F + d_p G \\ d_p(FG) &= (d_p F)G(p) + F(p)(d_p G) \end{aligned} \tag{1.3}$$

La condizione di tangenza per una retta $L = \{x + ta : t \in \mathbb{C}\}$ ad una varietà X può essere riscritta nella forma:

$$d_p F_1(a) = \dots = d_p F_m(a) = 0, \tag{1.4}$$

dove $I(X) = (F_1, \dots, F_m)$.

Definizione 1.23. L'unione di tutte le rette tangenti a X in un punto p si chiama spazio tangente a X in p e si indica con $T_p X$.

Consideriamo un elemento $g \in \mathbb{C}[X]$ e sia $G \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N]$ un polinomio la cui classe modulo $I(X)$ è g . Se F_1, \dots, F_m sono i generatori di $I(X)$ e $F \in I(X)$ si ha $F = \sum_i H_i F_i$. Dato $p \in X$, sfruttando (1.3), poiché $F_i(p) = 0$, si ottiene:

$$d_p F = \sum_i H_i(p) d_p F_i.$$

Quindi le condizioni di tangenza garantiscono che $d_p F$ si annulli su $T_p X$ e perciò i valori che $d_p G$ assume su $T_p X$ dipendono solo dalla classe modulo $I(X)$, cioè da g . Possiamo quindi definire un'applicazione lineare su $T_p X$, detta differenziale di g in p definita da:

$$d_p g = d_p G|_{T_p X}.$$

Definizione 1.24. Sia X una varietà algebrica di uno spazio proiettivo \mathbb{P}^n . Sia p un punto di X . Definiamo lo spazio tangente affine di X in p come $\hat{T}_p X = T_x \mathcal{C}(X)$, dove x è un qualsiasi punto di $\mathcal{C}(X)$ tale che $p = [x]$. È facile verificare che su un

cono sopra una varietà proiettiva, se $[x] = [y]$, allora $T_x\mathcal{C}(X) = T_y\mathcal{C}(X)$ e perciò la definizione è ben posta.

Definiamo lo spazio tangente di X in p *embedded* in $\mathbb{P}V$ come $\tilde{T}_pX = \mathbb{P}\hat{T}_pX$.

In genere si indicherà lo spazio tangente affine di una varietà proiettiva X semplicemente con la notazione T_pX anziché \hat{T}_pX .

Data una varietà algebrica $X \subseteq \mathbb{P}V$ di dimensione k definita da un ideale $I(X) = (F_1, \dots, F_m) \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, si può osservare che la matrice $M = (a_{ij})$ con $a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ ha al più rango $n - k$. Si dice che X è liscia in un punto p (o più semplicemente che p è liscio) se M valutata in p ha rango esattamente $n - k$; se un punto non è liscio, si dice singolare. Inoltre si può dimostrare che lo spazio tangente a X in p coincide con $\ker M$ in quanto la condizione di tangenza (1.4) per un vettore a è equivalente ad avere $a \in \ker M$. In particolare, in un punto liscio la dimensione dello spazio tangente coincide con k , dimensione della varietà.

Osservazione 1.25. L'insieme dei punti singolari di una varietà X , che indichiamo con X_{sing} , è una sottovarietà di X . Infatti i punti di X_{sing} sono tutti e soli quelli che soddisfano le equazioni definite dai polinomi che esprimono i minori di M di taglia $n - k$. Sono quindi una varietà algebrica. Con lo stesso argomento si può osservare che la funzione che associa a un punto p di X la dimensione di T_pX è superiormente semicontinua. In particolare, se esiste un punto p per cui $\dim T_pX = s$ si può dedurre che la dimensione della varietà X è al più s .

A conclusione di questo paragrafo, introduciamo la nozione di punto generale, che ricorrerà spesso nel seguito (per i dettagli si veda [Hj]):

Definizione 1.26. Siano p_1, \dots, p_r punti di \mathbb{P}^n . Se $r \leq n + 1$, si dice che p_1, \dots, p_r sono in posizione generale lineare se sono tra loro indipendenti. Se $r \geq n + 1$, si dice che sono in posizione generale lineare se comunque considerati $n + 1$ di essi, questi sono tra loro indipendenti.

Definizione 1.27. Sia X una varietà algebrica di \mathbb{P}^n . Si dice che in X vale la proprietà \mathcal{P} , oppure che vale la proprietà \mathcal{P} per il punto generale di X , se esiste un aperto U (nella topologia di Zariski) di X per cui ogni punto di U ha la proprietà \mathcal{P} .

L'Osservazione 1.25 può essere quindi riformulata come segue: se p è un punto generale di X , allora $\dim T_pX$ coincide con $\dim X$.

1.3 Varietà di Segre e di Veronese

Definizione 1.28. Siano V_1, \dots, V_k spazi vettoriali di dimensione finita. Si definisce il k -esimo embedding di Segre relativo a V_1, \dots, V_k come segue:

$$\begin{aligned} \text{Seg} : \mathbb{P}V_1 \times \dots \times \mathbb{P}V_k &\longrightarrow \mathbb{P}(V_1 \otimes \dots \otimes V_k) \\ ([v_1], \dots, [v_k]) &\longmapsto [v_1 \otimes \dots \otimes v_k] \end{aligned}$$

Grazie alla Proposizione 1.3, possiamo dare il seguente risultato, che ci permetterà di introdurre la nozione di Varietà di Segre:

Proposizione 1.29. *Sia $X = \mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k$ e sia Seg l'embedding di Segre di V_1, \dots, V_k in $\mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)$.*

Allora l'immagine di Seg è una varietà algebrica proiettiva.

Dimostrazione. $Seg(X)$ contiene tutti e soli gli elementi $[\omega]$, dove ω è un tensore di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ irriducibile. Per la Proposizione 1.3, $Flat_j(\omega)$ ha rango 1 per ogni $j = 1, \dots, k$. Perciò $\mathcal{C}(Seg(X))$ è il luogo degli zeri comuni a tutti i polinomi omogenei che esprimono il determinante dei minori 2×2 dei flattening dei tensori di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$. Da questo si ha la tesi. \square

Definizione 1.30. La varietà $X = Seg(\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k)$ è detta varietà di Segre di $\mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)$. Per non appesantire la notazione, indicheremo la varietà di Segre semplicemente con $\mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k$, o anche con $\mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$, dove $\dim(V_i) = n_i + 1$.

Definizione 1.31. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita. Si definisce il k -esimo embedding di Veronese di V come segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_d : \mathbb{P}V &\longrightarrow \mathbb{P}(S^d V) \\ [v] &\longmapsto [v \circ \cdots \circ v] \end{aligned}$$

Identificato $S^d(V^\vee)$ con lo spazio dei polinomi omogenei di grado d su V , l'embedding di Veronese prende la forma seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_d : \mathbb{P}V &\longrightarrow \mathbb{P}(S^d V) \\ [x_0 : \cdots : x_n] &\longmapsto [\cdots : X^I : \cdots]_{|I|=d} \end{aligned}$$

dove, se $I = (i_0, \dots, i_n)$, si intende con $|I|$ il valore $\sum i_j$ e con X^I il monomio $x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}$.

Osservazione 1.32. L'immagine dell'embedding di Veronese è una varietà algebrica. Infatti, per ogni quattro multiindici I, J, K, L con $|I| = |J| = |K| = |L| = d$ tali che $I + J = K + L$, allora $Z_I Z_J - Z_K Z_L$ (dove Z_I è la coordinata in $\mathbb{P}(S^d V)$ di posto I) sono i polinomi che definiscono l'immagine di $\mathbb{P}V$ attraverso \mathcal{V}_d . Perciò $\mathcal{V}_d(\mathbb{P}V)$ è una varietà algebrica, detta d -esima Varietà di Veronese relativa a V .

Proposizione 1.33. *Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ una varietà di Segre. Sia $p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ un punto di X . Allora:*

$$T_p X = (V_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k) + \cdots + (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{k-1} \otimes V_k).$$

Dimostrazione. Una curva su X per p ha la forma $\zeta(t) = \alpha_1(t) \otimes \cdots \otimes \alpha_k(t)$, dove $\alpha_i(t)$ è una curva arbitraria di V_i per v_i . Indichiamo con w_i il vettore tangente ad $\alpha_i(t)$ in 0, e calcoliamo il vettore tangente a ζ :

$$\zeta'(0) = \alpha_1'(0) \otimes \alpha_2(0) \otimes \cdots \otimes \alpha_k(0) + \dots + \alpha_1(0) \otimes \cdots \otimes \alpha_{k-1}(0) \otimes \alpha_k'(0) =$$

$$= w_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k + \dots + v_1 \otimes \cdots \otimes v_{k-1} \otimes w_k.$$

Per l'arbitrarietà delle curve α_i , anche i vettori w_i sono arbitrari. Quindi si ottiene:

$$T_p X = (V_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k) + \cdots + (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{k-1} \otimes V_k).$$

□

Ci sarà utile una notazione compatta per indicare gli addendi che troviamo nella scrittura di $T_p X$. Data una varietà di Segre $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$, e dato un punto $p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in X$ indichiamo con $G_p^i X$ lo spazio seguente:

$$G_p^i X = v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes V_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_k.$$

Si potrà rendere la notazione più leggera nei capitoli che seguono con questa osservazione:

Osservazione 1.34. Data una varietà di Segre $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$, indichiamo con $\hat{X}_i = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_{i-1}} \times \mathbb{P}^{n_{i+1}} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$, varietà di Segre ottenuta da X eliminando il fattore al posto i . Esiste un'applicazione naturale $\pi_{X,i} : X \rightarrow \hat{X}_i$ che associa a $p = ([v_1], \dots, [v_k])$ il punto $\hat{p}_i = ([v_1], \dots, [v_{i-1}], [v_{i+1}], \dots, [v_k])$. È evidente che, dati due punti $p, p' \in X$ tali che $\pi_{X,i}(p) = \pi_{X,i}(p')$, allora $G_p^i X = G_{p'}^i X$.

Per questo motivo, se abbiamo due varietà di Segre X e Y tali che $\hat{X}_i = \hat{Y}_i$, dato un punto $p \in Y$, talvolta indicheremo, con un abuso di notazione ma senza ambiguità, $G_p^i X$ intendendo $G_q^i X$, dove q è un qualsiasi punto di X tale che $\pi_{X,i}(q) = \pi_{Y,i}(p)$.

1.4 Join e varietà secanti

Dati due punti distinti p, q di uno spazio proiettivo \mathbb{P}^n , indichiamo con $\mathbb{P}_{p,q}^1$ la retta proiettiva passante per p e q . Analogamente, dati s punti generali p_1, \dots, p_s di \mathbb{P}^n indichiamo con $\mathbb{P}_{p_1, \dots, p_s}^{s-1}$ il sottospazio di \mathbb{P}^n generato dai punti p_1, \dots, p_s .

Definizione 1.35. Siano X, Y due varietà algebriche proiettive di \mathbb{P}^n . Si definisce il join di X, Y come la chiusura di Zariski dell'insieme delle rette proiettive passanti per un punto di X e uno di Y , ovvero:

$$J(X, Y) = \overline{\bigcup_{x \in X, y \in Y} \mathbb{P}_{x,y}^1}.$$

In generale, diamo la definizione seguente:

Definizione 1.36. Siano X_1, \dots, X_k varietà proiettive di \mathbb{P}^n . Si definisce il join di X_1, \dots, X_k nel modo seguente:

$$J(X_1, \dots, X_k) = \overline{\bigcup_{p_1 \in X_1, \dots, p_k \in X_k} \mathbb{P}_{p_1, \dots, p_k}^{k-1}}.$$

Il seguente importante risultato (cfr. [Sh], Ch. I, §3) ci permetterà di fare una fondamentale osservazione sulla dimensione di un join di varietà.

Teorema 1.37. *Sia $f : X \rightarrow Y$, un'applicazione regolare suriettiva tra due varietà irriducibili. Sia $\dim X = n$ e $\dim Y = m$. Allora $m \leq n$ e valgono le seguenti affermazioni:*

- (i) $\dim f^{-1}(y) \geq n - m$ per ogni punto di $y \in Y$.
- (ii) esiste un aperto U non vuoto di Y tale che per ogni $y \in U$, $\dim f^{-1}(y) = n - m$.

Definizione 1.38. Siano X_1, \dots, X_k varietà algebriche di uno spazio proiettivo \mathbb{P}^m . Si definisce il join astratto delle varietà X_1, \dots, X_k come:

$$\mathcal{J}(X_1, \dots, X_k) = \overline{\{(p_1, \dots, p_k, v) \in X_1 \times \dots \times X_k \times \mathbb{P}^m : v \in \mathbb{P}_{p_1, \dots, p_k}^{k-1}\}}.$$

Proposizione 1.39. *Siano X_1, \dots, X_k varietà algebriche di uno spazio proiettivo \mathbb{P}^m , rispettivamente di dimensione d_1, \dots, d_k . Allora la dimensione di $J(X_1, \dots, X_k)$ è al più $D = \min\{m, \sum d_i + (k - 1)\}$.*

Dimostrazione. Consideriamo il join astratto $\mathcal{J}(X_1, \dots, X_k)$. Esistono le due proiezioni naturali ρ e π di $\mathcal{J}(X_1, \dots, X_k)$ rispettivamente su $X_1 \times \dots \times X_k$ e su \mathbb{P}^m . Applicando il Teorema 1.37 a ρ , si osserva facilmente che la dimensione di $\mathcal{J}(X_1, \dots, X_k)$ è $\sum d_i + (k - 1)$; infatti dati p_1, \dots, p_k con $p_j \in X_j$ in posizione generale, lo spazio da essi generato ha dimensione (affine) k e quindi la fibra ha dimensione $k - 1$. D'altra parte l'immagine di π è proprio $J(X_1, \dots, X_k)$ che quindi può avere al massimo dimensione D . \square

Si dice che D è la dimensione attesa del join $J(X_1, \dots, X_k)$. Se invece la dimensione del join è minore di D , si dice che questo è difettivo. Il valore $\delta = D - \dim J(X_1, \dots, X_k)$ si chiama difetto.

Definizione 1.40. Sia X una varietà algebrica di \mathbb{P}^V . Si chiama la s -esima varietà secante di X il join di s copie di X , cioè:

$$\sigma_s(X) = J(\underbrace{X, \dots, X}_{s \text{ volte}})$$

Il seguente fondamentale risultato, noto con il nome di Lemma di Terracini, ci permette di dare un'importante caratterizzazione dello spazio tangente a un join, in termini degli spazi tangenti alle singole varietà.

Teorema 1.41 (Lemma di Terracini). *Siano X e Y due varietà algebriche proiettive di \mathbb{P}^V . Sia $Z = J(X, Y)$. Sia $[z]$ un punto generale di Z e siano $[x], [y]$ punti generali di X e Y rispettivamente, tali che $[z] \in \mathbb{P}_{[x], [y]}^1$. Allora:*

$$T_{[z]}Z = T_{[x]}X + T_{[y]}Y.$$

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione di addizione:

$$\begin{aligned} \text{add} : V \times V &\longrightarrow V \\ (v, w) &\longmapsto v + w \end{aligned}$$

Per come è definito il join di due varietà, si ha che:

$$\mathcal{C}(J(X, Y)) = \overline{\text{add}(\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y))}$$

Sia $v(t)$ una curva di $\mathcal{C}(J(X, Y))$ tale che $v(0) = z$. Possiamo assumere che $v(t) = \alpha(t) + \beta(t)$, dove $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono curve di $\mathcal{C}(X)$ e $\mathcal{C}(Y)$ rispettivamente con $\alpha(0) = x$ e $\beta(0) = y$.

Si ottiene immediatamente $\dot{v}(0) = \dot{\alpha}(0) + \dot{\beta}(0)$. E da questo si ha evidentemente la tesi: $T_{[z]}Z = T_{[x]}X + T_{[y]}Y$. \square

Il Lemma di Terracini si estende facilmente a join di un numero qualsiasi di varietà.

Da quanto si è detto fino a questo punto, emerge che lo studio del rango di tensori è equivalente allo studio della difettività di una varietà secante alla varietà di Segre. Infatti, è facile osservare che il rango-bordo di un tensore $\omega \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$ è r se e solo se la più piccola secante di $X = \mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_k$ che contiene $[\omega]$ è proprio la r -secante. In particolare, la prima secante la cui dimensione coincide con quella dell'ambiente fornisce una limitazione superiore per il rango di qualunque tensore di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$.

Gli strumenti che abbiamo fornito in questo capitolo, ci permetteranno di proseguire lo studio della difettività della secante alla varietà di Segre. Nel capitolo successivo si studierà il metodo induttivo presentato in [AOP], che, con l'ausilio del Lemma di Terracini, permetterà in molti casi di determinare se una data varietà secante è difettiva o meno.

Capitolo 2

Un metodo induttivo per lo studio delle varietà secanti

Il metodo induttivo presentato in [AOP] consente di studiare la difettività delle varietà secanti a varietà di Segre. Prima affrontare questo argomento introduciamo la notazione che ci accompagnerà durante tutto il capitolo.

Dati $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$ e k spazi vettoriali su \mathbb{C} , V_1, \dots, V_k con $\dim V_j = n_j + 1$, utilizzeremo la seguente notazione: $\mathbb{P}^{\mathbf{n}} = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k} = \mathbb{P}V_1 \times \dots \times \mathbb{P}V_k$.

Data una varietà X e s punti generali su X , p_1, \dots, p_s , denotiamo con $T_s X$ lo spazio generato dagli s spazi tangenti nei punti considerati: $T_s X = T_{p_1} X + \dots + T_{p_s} X$.

Infine dati t punti generali su X , q_1, \dots, q_t , indicheremo con $G_t^i X$ lo spazio dato da $G_{q_1}^i X + \dots + G_{q_t}^i X$.

Diamo la seguente fondamentale definizione:

Definizione 2.1. Siano $n_1, \dots, n_k, s, a_1, \dots, a_k$ interi non negativi, siano $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$ e $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$, sia $X = \mathbb{P}^{\mathbf{n}}$. Si dice che $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è vera (o che $T(n_1, \dots, n_k; s; a_1, \dots, a_k)$ è vera se lo spazio $L = T_s X + G_{a_1}^1 X + \dots + G_{a_k}^k X$ ha dimensione D , dove:

$$D = \min \left\{ s(1 + \sum_{i=1}^k n_i) + \sum_{i=1}^k (a_i(n_i + 1)), \prod_{i=1}^k (n_i + 1) \right\}.$$

Osservazione 2.2. Per dualità, è immediato che la precedente definizione equivale alla seguente: si dice che vale $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ se il sottospazio $T_s X^\perp \cap G_{a_1}^1 X^\perp \dots \cap G_{a_k}^k X^\perp$ ha codimensione D in $V_1^\vee \otimes \dots \otimes V_k^\vee$.

Definizione 2.3. Si dice che la terna $(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è subabbondante se vale la disuguaglianza: $\prod (n_i + 1) \geq s(1 + \sum n_i) + \sum (a_i(n_i + 1))$.

Si dice che la terna è superabbondante se vale la disuguaglianza in senso opposto: $\prod (n_i + 1) \leq s(1 + \sum n_i) + \sum (a_i(n_i + 1))$.

Infine si dice che la terna è equiabbondante se è sia subabbondante sia superabbondante.

Se $(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è equiabbondante e $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è vera, si dice che $\mathbb{P}^{\mathbf{n}}$ è perfetto.

Se $\prod(n_i + 1)/(1 + \sum n_i)$ è un intero si dice che \mathbf{n} è numericamente perfetto.

Per semplicità di notazione si potrà spesso parlare dell'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ intendendo sia la terna $(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ che la stessa $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$. Si potrà quindi affermare, ad esempio, che $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è vera e subabbondante, intendendo che $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è vera e $(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è subabbondante.

Nel seguito considereremo sempre $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k} \subseteq \mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k)$.

La validità dell'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{0})$ equivale alla non difettività della varietà secante $\sigma_s(X)$. Infatti dato un punto generale di $\sigma_s(X)$, questo può essere scritto come combinazione di punti generali di X . Dunque per il Lemma di Terracini, si deduce che lo spazio tangente a $\sigma_s(X)$ coincide con lo spazio generato da s spazi tangenti in altrettanti punti generali di X . In altre parole $T_q\sigma_s(X) = T_sX$, dove si considerano s punti p_1, \dots, p_s tali che $q \in \langle p_1, \dots, p_s \rangle$. Inoltre possiamo fare l'osservazione seguente:

Osservazione 2.4. Consideriamo una varietà X di \mathbb{P}^m e W_1, \dots, W_p p sottovarietà di X . Il join $J(W_1, \dots, W_p)$ è detto una varietà secante parziale di X . Nel caso particolare in cui X sia la varietà di Segre $\mathbb{P}^{\mathbf{n}} = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ consideriamo $L = T_sX + G_{a_1}^1X + \cdots + G_{a_k}^kX$. Con il Lemma di Terracini, mostreremo che L è lo spazio tangente a una particolare varietà secante parziale di X . In particolare valgono le affermazioni seguenti:

- T_sX è lo spazio tangente a $J(\underbrace{X, \dots, X}_{s \text{ volte}})$;
- dato $p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \in X$, G_p^jX è lo spazio tangente alla sottovarietà di X $v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes \mathbb{P}^{n_j} \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_k$, copia di \mathbb{P}^{n_j} immersa in X ;
- $G_{a_j}^jX$ è lo spazio tangente al join di a_j sottospazi lineari della forma indicata al punto precedente.

Quindi si può applicare ancora il Lemma di Terracini, e dedurre che L è lo spazio tangente alla varietà secante parziale data dal join di s copie di X , e, per ogni $j = 1, \dots, k$, da a_j sottospazi lineari \mathbb{P}^{n_j} immersi in X .

Questa osservazione ci permette di studiare lo spazio L con gli stessi argomenti di semicontinuità della dimensione dello spazio tangente di una varietà algebrica e in particolare con l'Osservazione 1.25. Inoltre, riprendendo la terminologia usata nel caso della dimensione di un join, potremo dire che la terna $(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è difettiva oppure che L ha la dimensione aspettata, a seconda che valga o meno $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$.

In particolare, la Proposizione 1.39 ci permette di dedurre che la validità di $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è equivalente al fatto che L ha la massima dimensione possibile. Nel caso subabbondante, da questo si deduce che gli spazi che definiscono L sono tra loro

linearmente indipendenti. Nel caso superabbondante, si può concludere che lo spazio L coincide con l'intero $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$.

Si può inoltre osservare quanto segue:

Osservazione 2.5. Dati due vettori \mathbf{w}, \mathbf{w}' della stessa dimensione k , consideriamo la relazione d'ordine parziale definita da:

$$\mathbf{w} \leq \mathbf{w}' \text{ se e solo se } w_i \leq w'_i \forall i = 1, \dots, k.$$

È facile verificare che se $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è vera e subabbondante, allora $T(\mathbf{n}, s', \mathbf{a}')$ è vera e subabbondante per ogni $s' \leq s$ e $\mathbf{a}' \leq \mathbf{a}$. Per verificare la subabbondanza di $(\mathbf{n}, s', \mathbf{a}')$ è sufficiente osservare che $s'(1 + \sum n_i) + \sum (a'_i(n_i + 1)) \leq s(1 + \sum n_i) + \sum (a_i(n_i + 1))$. Inoltre è chiaro che se gli spazi che definiscono $T_s X + \sum G_{a_i}^i X$ sono indipendenti in $s + \sum a_i$ punti generali, a maggior ragione saranno indipendenti in $s' + \sum a'_i$ punti generali.

Analogamente si verifica che se $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è vera e superabbondante, allora $T(\mathbf{n}, s', \mathbf{a}')$ è vera e superabbondante per ogni $s' \geq s$ e $\mathbf{a}' \geq \mathbf{a}$. Infatti se $T_s X + \sum G_{a_i}^i X$ satura l'ambiente, a maggior ragione $T_{s'} X + \sum G_{a'_i}^i X$.

2.1 I teoremi di subabbondanza e superabbondanza

Enunceremo ora due teoremi, ripresi da [AOP], che ci forniranno un potente strumento induttivo, permettendoci di dedurre la validità di un'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ dalla validità di particolari affermazioni della forma $T(\mathbf{n}', s', \mathbf{a}')$ con $\mathbf{n}' \leq \mathbf{n}$.

Ci sarà utile il risultato seguente:

Proposizione 2.6. *Siano U, V, W tre spazi vettoriali di dimensione finita tali che esista una sequenza esatta:*

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\Phi} V \xrightarrow{\Psi} W \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

Siano U_1, U_2 sottospazi di U , V_1, V_2 sottospazi di V , W_1, W_2 sottospazi di W , tali che siano esatte le sequenze:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow U_1 \xrightarrow{\phi_1} V_1 \xrightarrow{\psi_1} W_1 \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow U_2 \xrightarrow{\phi_2} V_2 \xrightarrow{\psi_2} W_2 \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove con ϕ_1 e ϕ_2 si intende la restrizione di Φ a U_1 e U_2 rispettivamente e con ψ_1 e ψ_2 la restrizione di Ψ a V_1 e V_2 rispettivamente.

Allora vale la disuguaglianza seguente:

$$\dim(V_1 + V_2) \geq \dim(U_1 + U_2) + \dim(W_1 + W_2).$$

Dimostrazione. Φ è un isomorfismo tra U e un sottospazio di V , perciò possiamo considerare U direttamente come sottospazio di V . Analogamente U_1 e U_2 sono sottospazi di V_1 e V_2 rispettivamente.

È evidente che $U_1 \subseteq (V_1 \cap U)$ e $U_2 \subseteq (V_2 \cap U)$. In particolare valgono le seguenti inclusioni:

$$U_1 + U_2 \subseteq (V_1 \cap U) + (V_2 \cap U) \subseteq (V_1 + V_2) \cap U. \quad (2.3)$$

Consideriamo la sequenza seguente, in cui le applicazioni ϕ e ψ sono rispettivamente Φ e Ψ opportunamente ristrette:

$$0 \longrightarrow (V_1 + V_2) \cap U \xrightarrow{\phi} V_1 \cap V_2 \xrightarrow{\psi} W_1 + W_2 \longrightarrow 0. \quad (2.4)$$

Mostriamo che si tratta di una sequenza esatta. ϕ è restrizione di Φ , che è iniettiva, e quindi è anch'essa iniettiva. Inoltre è facile verificare che ψ è suriettiva, perché $\text{Im}(\psi) = \text{Im}(\psi_1) + \text{Im}(\psi_2)$. L'inclusione $\text{Im}(\phi) \subseteq \ker(\psi)$ è banale per l'esattezza della sequenza (2.1). Resta quindi da verificare l'inclusione $\ker(\psi) \subseteq \text{Im}(\phi)$. Ma anche questo si deduce immediatamente dall'esattezza di (2.1), per la quale, se $\Psi(v) = 0$, allora $v \in U$.

L'esattezza di (2.4) e le inclusioni di (2.3) ci permettono di stimare la dimensione di $V_1 + V_2$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \dim(V_1 + V_2) &= \\ &= \dim(W_1 + W_2) + \dim(U \cap (V_1 + V_2)) \geq \\ &\geq \dim(W_1 + W_2) + \dim(U_1 + U_2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

da cui si ha la tesi. □

Teorema 2.7 (di Subabbondanza). *Siano $n_k + 1 = (n'_k + 1) + (n''_k + 1)$, $s = s' + s''$, $a_j = a'_j + a''_j$ per $j = 1, \dots, k - 1$.*

Supponiamo che:

(i) $T(n_1, n_2, \dots, n'_k; s'; a'_1, a'_2, \dots, a_k + s'')$ è vera e subabbondante.

(ii) $T(n_1, n_2, \dots, n''_k; s''; a''_1, a''_2, \dots, a_k + s')$ è vera e subabbondante.

Allora $T(n_1, \dots, n_k; s; a_1, \dots, a_k)$ è vera e subabbondante.

Dimostrazione. Consideriamo un sottospazio H di V_k di dimensione $n'_k + 1$. La sequenza seguente, in cui le applicazioni sono l'immersione naturale del sottospazio e la proiezione naturale sul quoziente, è esatta:

$$0 \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_{k-1} \otimes H \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_k \rightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_{k-1} \otimes V_k/H \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

Siano X' e X'' le varietà di Segre definite da:

$$\begin{aligned} X' &= \mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_{k-1} \times H, \\ X'' &= \mathbb{P}V_1 \times \cdots \times \mathbb{P}V_{k-1} \times \mathbb{P}(V_k/H), \end{aligned}$$

immerse rispettivamente in $\mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_{k-1} \otimes H)$ e in $\mathbb{P}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_{k-1} \otimes V_k/H)$. Poiché $\hat{X}_k = \hat{X}'_k = \hat{X}''_k$ utilizzeremo la notazione descritta nell'Osservazione 1.34 .

Consideriamo s punti generali di X , p_1, \dots, p_s , della forma $p_i = v_{1,i} \otimes \cdots \otimes v_{k,i}$, in modo che $v_{k,i} \in H$ per $i = 1, \dots, s'$.

Le sequenze seguenti sono esatte (con $[p]$ si intende la classe di p nel quoziente):

$$\begin{aligned} \text{per } i = 1, \dots, s' & \quad 0 \rightarrow T_{p_i} X' \rightarrow T_{p_i} X \rightarrow G_{p_i}^k X'' \rightarrow 0, \\ \text{per } i = s' + 1, \dots, s & \quad 0 \rightarrow G_{p_i}^k X' \rightarrow T_{p_i} X \rightarrow T_{[p_i]} X'' \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Consideriamo poi a_k punti generali di X , $q_{k,1}, \dots, q_{k,a_k}$. Per ogni $i = 1, \dots, a_k$, abbiamo la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow G_{q_{k,i}}^k X' \rightarrow G_{q_{k,i}}^k X \rightarrow G_{q_{k,i}}^k X'' \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Consideriamo infine, per ogni $t = 1, \dots, k-1$, a_t punti generali, $q_{t,1}, \dots, q_{t,a_t}$, della forma $q_{t,j} = v_{1,t,j} \otimes \cdots \otimes v_{k,t,j}$, con $v_{k,t,j} \in H$ per $j = 1, \dots, a'_t$. Valgono i seguenti isomorfismi:

$$\begin{aligned} \text{per } i = 1, \dots, a'_t & \quad G_{q_{t,i}}^t X \simeq G_{q_{t,i}}^t X', \\ \text{per } i = a'_t + 1, \dots, a_t & \quad G_{q_{t,i}}^t X \simeq G_{q_{t,i}}^t X''. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Otteniamo così sequenze esatte con quattro termini, divise in due gruppi; quelle relative a $i = 1, \dots, a'_t$ e quelle relative a $i = a'_t + 1, \dots, a_t$. Possiamo assumere che le sequenze del primo gruppo abbiano come quarto termine il sottospazio banale di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_{k-1} \otimes V_k/H$, e che il primo termine di quelle del secondo gruppo sia il sottospazio banale di $V_1 \otimes \cdots \otimes V_{k-1} \otimes H$. In questo modo otteniamo sequenze esatte analoghe a 2.8, in cui il secondo o il quarto termine è banale.

Consideriamo ora le sequenze esatte di (2.7) e di (2.8) e quelle ottenute dagli isomorfismi di (2.9), e ricordando la sequenza esatta (2.6), applichiamo la Proposizione 2.6, estesa a un numero qualsiasi di sottospazi, ottenendo la seguente disequaglianza:

$$\begin{aligned} \dim \left(T_s X + G_{a_1}^1 X + \cdots + G_{a_k}^k X \right) &\geq \\ &\geq \left[\dim \left(T_{s'} X' + G_{a'_1}^1 X' + \cdots + G_{a'_{k-1}}^{k-1} X' + G_{a_k+s''}^k X' \right) \right] + \\ &+ \left[\dim \left(T_{s''} X'' + G_{a''_1}^1 X'' + \cdots + G_{a''_{k-1}}^{k-1} X'' + G_{a_k}^k X'' \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Per l'ipotesi (i) si ha che $\dim \left(T_{s'} X' + G_{a'_1}^1 X' + \cdots + G_{a'_{k-1}}^{k-1} X' + G_{a_k+s''}^k X' \right) = s'(1+n_1+\cdots+n_{k-1}+n'_k) + a'_1(n_1+1) + \cdots + a'_{k-1}(n_{k-1}+1) + (a_k+s'')(n'_k+1)$. Analoga-

mente per l'ipotesi (ii), $\dim(T_{s''}X'' + G_{a_1''}^1X'' + \dots + G_{a_{k-1}''}^{k-1}X'' + G_{a_k''}^kX'') = s''(1 + n_1 + \dots + n_{k-1} + n_k'') + a_1''(n_1 + 1) + \dots + a_{k-1}''(n_{k-1} + 1) + (a_k + s'')(n_k'' + 1)$. Otteniamo così la diseuguaglianza:

$$\dim(T_sX + G_{a_1}^1X + \dots + G_{a_k}^kX) \geq s(1 + \sum n_i) + \sum (a_i(n_i + 1)).$$

Poiché il secondo termine della diseuguaglianza è proprio il valore aspettato si ottiene la tesi. \square

In modo del tutto analogo si dimostra anche il seguente teorema:

Teorema 2.8 (di Superabbondanza). *Siano $n_k = (n_k' + 1) + (n_k'' + 1)$, $s = s' + s''$, $a_j = a_j' + a_j''$ per $j = 1, \dots, k - 1$.*

Supponiamo che:

(i) $T(n_1, \dots, n_{k-1}, n_k'; s'; a_1', \dots, a_{k-1}', a_k + s'')$ è vera e superabbondante.

(ii) $T(n_1, \dots, n_{k-1}, n_k''; s''; a_1'', \dots, a_{k-1}'', a_k + s')$ è vera e superabbondante.

Allora $T(n_1, \dots, n_k; s; a_1, \dots, a_k)$ è vera e superabbondante.

Dimostrazione. Si procede in modo analogo a quanto fatto nel Teorema di Subabbondanza 2.7, fino ad ottenere la diseuguaglianza 2.10. In questo caso la diseuguaglianza che si ottiene sfruttando le ipotesi (i) e (ii) è la seguente:

$$\dim(T_sX + G_{a_1}^1X + \dots + G_{a_k}^kX) \geq \prod (n_i + 1),$$

e perciò anche in questo caso si ha la tesi. \square

Dai Teoremi 2.7 e 2.8 segue banalmente il seguente risultato:

Corollario 2.9. *Siano $n_1 + 1 = (n_1' + 1) + (n_1'' + 1)$, $s = s' + s''$, $a_j = a_j' + a_j''$ per $j = 1, \dots, k - 1$.*

Supponiamo che:

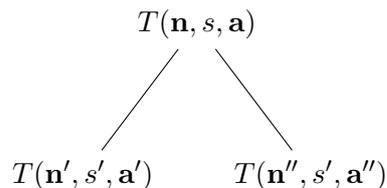
(i) $T(n_1, \dots, n_{k-1}, n_k'; s'; a_1', \dots, a_{k-1}', a_k + s'')$ è vera e equiabbondante.

(ii) $T(n_1, \dots, n_{k-1}, n_k''; s''; a_1'', \dots, a_{k-1}'', a_k + s')$ è vera e equiabbondante.

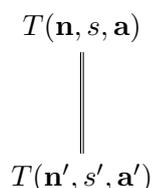
Allora $T(n_1, \dots, n_k; s; a_1, \dots, a_k)$ è vera e equiabbondante.

Definizione 2.10. Siano $\mathcal{T} = T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$, $\mathcal{T}' = T(\mathbf{n}', s', \mathbf{a}')$, $\mathcal{T}'' = T(\mathbf{n}'', s'', \mathbf{a}'')$. Si dice che \mathcal{T} si riduce sul j -esimo fattore in \mathcal{T}' e \mathcal{T}'' se queste due affermazioni soddisfano le relazioni aritmetiche descritte dai Teoremi 2.7 e 2.8 rispetto al j -esimo fattore, cioè se $n_i' = n_i'' = n_i$ per $i \neq j$, $(n_j' + 1) + (n_j'' + 1) = n_j + 1$, $s' + s'' = s$, $a_i' + a_i'' = a_i$ per $i \neq j$, $a_j' = a_j + s''$ e $a_j'' = a_j + s'$. Se inoltre è conservata l'abbondanza, cioè se le affermazioni coinvolte sono tutte subabbondanti oppure tutte superabbondanti, diremo che la riduzione è *ammissibile*.

Spesso potrà essere utile e di immediata comprensione riassumere la riduzione in un albero binario della forma seguente:



Un albero di questo tipo è chiamato un albero di riduzione per $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$. Utilizzeremo la notazione $b \star T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ per indicare b copie dell'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$. In particolare quando le due affermazioni in cui viene ridotta $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ coincidono, diremo che $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ si riduce in $2 \star T(\mathbf{n}', s', \mathbf{a}')$. Possiamo riassumere questa situazione con un albero con un solo figlio:



Spesso, soprattutto per via della loro dimensione, gli alberi saranno rappresentati con una crescita da sinistra verso destra, anziché dall'alto verso il basso.

2.2 Conseguenze dei teoremi di subabbondanza e superabbondanza

Come corollario dei Teoremi 2.7 e 2.8, possiamo dimostrare un fondamentale risultato, che mostra come la riduzione della dimensione dei fattori della varietà di Segre possa portare alla riduzione del numero dei fattori stessi.

In particolare, se uno dei fattori della varietà X è \mathbb{P}^1 , la riduzione genera varietà di Segre in cui uno dei fattori è \mathbb{P}^0 , e quindi, di fatto, varietà di Segre con un fattore in meno rispetto a quella originale. Questo può essere riassunto nel seguente risultato:

Proposizione 2.11. *Siano $n_2, \dots, n_k, s, a_1, \dots, a_k$ interi non negativi. Valgono le seguenti affermazioni:*

1. se $T(n_2, \dots, n_k; s; a_2, \dots, a_k)$ è vera, allora $T(0, n_2, \dots, n_k; s; a_1, a_2, \dots, a_k)$ è vera;
2. se $T(0, n_2, \dots, n_k; s; a_1, a_2, \dots, a_k)$ è vera e subabbondante, allora anche $T(n_2, \dots, n_k; s; a_2, \dots, a_k)$ è vera e subabbondante;
3. se $T(0, n_2, \dots, n_k; s; 0, a_2, \dots, a_k)$ è vera e superabbondante, allora anche $T(n_2, \dots, n_k; s; a_2, \dots, a_k)$ è vera e superabbondante.

Dimostrazione. 1. Consideriamo dapprima il caso in cui $(n_2, \dots, n_k; s; a_2, \dots, a_k)$ è subabbondante. Siano $X = \mathbb{P}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k}$ e $X' = \mathbb{P}^0 \times \mathbb{P}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k}$. Poniamo

$L = T_s X + G_{a_2}^2 X + \cdots + G_{a_k}^k X$ e $L' = T_s X' + G_{a_1}^1 X' + G_{a_2}^2 X' + \cdots + G_{a_k}^k X'$. Poiché $T(n_2, \dots, n_k; s; a_2, \dots, a_k)$ è vera e subabbondante si ha che $\dim L = s(1 + \sum n_i) + \sum (a_i(n_i + 1))$. Poiché \mathbb{P}^0 consiste di un singolo punto, possiamo supporre che ogni punto $p = v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$ considerato per la definizione di L , corrisponda a un punto $p' = w \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k$ considerato per la definizione di L' , dove per la multilinearità si può assumere che w sia il medesimo per ogni punto. Dunque si ottiene $T_{p'} X' = T_p X$ e $G_{p'}^t X' = G_p^t X$ per ogni punto p .

È quindi facile osservare che se L ha la dimensione massima possibile, anche $L_1 = T_s X' + G_{a_2}^2 X' + \cdots + G_{a_k}^k X'$ ha la dimensione massima possibile, in quanto questa coincide con la stessa di L . Consideriamo quindi $G_p^1 X'$, che è uno spazio 1-dimensionale. In questo caso il fatto che $G_p^1 X'$ sia indipendente da L_1 , è equivalente al fatto che $G_p^1 X'$ non sia contenuto in L_1 ; ma poiché p viene considerato in posizione generale rispetto ai punti che definiscono L_1 , per l'ipotesi di subabbondanza $G_p^1 X'$ non è contenuto in L_1 e perciò è indipendente da questo. Considerando dunque a_1 punti in posizione generale, possiamo applicare più volte questo argomento, fino a che, o si esauriscono gli a_1 punti considerati, oppure viene saturato l'ambiente. Nel primo caso si ha che $T(0, n_2, \dots, n_k; s; a_1, a_2, \dots, a_k)$ è subabbondante e L' ha la dimensione aspettata, e perciò l'affermazione è vera. Nel secondo caso si ha che tale affermazione è superabbondante e L' satura l'ambiente; anche in questo caso l'affermazione è vera.

Invece, se $T(n_2, \dots, n_k; s; a_2, \dots, a_k)$ è superabbondante, si ha immediatamente che anche $T(0, n_2, \dots, n_k; s; 0, a_2, \dots, a_k)$ è superabbondante. Inoltre è vera perché, lo spazio L' associato a $T(0, n_2, \dots, n_k; s; 0, a_2, \dots, a_k)$ ha la stessa dimensione aspettata di L e anche gli spazi ambienti hanno la stessa dimensione. Perciò L satura l'ambiente. Dalla validità di $T(0, n_2, \dots, n_k; s; 0, a_2, \dots, a_k)$, per l'Osservazione 2.5, si ottiene la tesi.

2. Supponiamo che $T(0, n_2, \dots, n_k; s; a_1, a_2, \dots, a_k)$ sia vera e subabbondante. Per l'Osservazione 2.5, anche $T(0, n_2, \dots, n_k; s; 0, a_2, \dots, a_k)$ è vera e subabbondante. In questo caso abbiamo che L_1 (come è stato definito in precedenza) ha la dimensione aspettata, e perciò, considerando i punti di X che definiscono L in corrispondenza con quelli di X' che definiscono L_1 , risulta che anche L ha la dimensione aspettata.

3. Infine supponiamo che $T(0, n_2, \dots, n_k; s; 0, a_2, \dots, a_k)$ sia vera e superabbondante. Questo significa che L_1 satura l'ambiente. Ma ancora una volta tutti gli addendi che definiscono L_1 sono isomorfi ai corrispondenti addendi che definiscono L , e quindi anche L satura l'ambiente. □

È facile costruire un controesempio che dimostra come non sia sufficiente la validità di un'affermazione superabbondante $T(0, n_2, \dots, n_k; s; a_1, a_2, \dots, a_k)$ per garantire che anche $T(n_2, \dots, n_k; s; a_2, \dots, a_k)$ sia vera.

Esempio 2.12. Consideriamo l'affermazione superabbondante $T(1, 2, 3; 3; 0, 0, 2)$. Questa affermazione è falsa: consideriamo infatti l'affermazione $T(1, 2, 5; 5; 0, 0, 0)$,

che è falsa in quanto per la Proposizione 2.14 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5$ ha la 5-secante difettiva. Questa si riduce nelle due affermazioni superabbondanti $T(1, 2, 3; 3; 0, 0, 2)$ e $T(1, 2, 1; 2; 0, 0, 3)$. Poiché la seconda affermazione è vera, si ha necessariamente che la prima è falsa. Per la Proposizione 2.11, risulta che anche $T(1, 2, 3, 0; 3; 0, 0, 2, 0)$ è superabbondante e falsa. Tuttavia si può verificare, con l'ausilio del software Macaulay2, che l'affermazione $T(1, 2, 3, 0; 3; 0, 0, 2, 1)$ è vera ed ovviamente è superabbondante. Dunque la validità di $T(1, 2, 3, 0; 3; 0, 0, 2, 1)$ non è sufficiente per garantire che $T(1, 2, 3; 3; 0, 0, 2)$ sia vera.

Può essere conveniente utilizzare la validità (o la non validità) di affermazioni $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ per discutere la validità di altre affermazioni della forma $T(\mathbf{n}', s, \mathbf{a})$. Il risultato seguente descrive i casi in cui questo può essere fatto.

Proposizione 2.13 (v. [AOP], Proposizione 3.11). *Supponiamo che $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ sia vera.*

- (i) *Se $(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è subabbondante, allora per ogni $\mathbf{n}' \geq \mathbf{n}$, anche $T(\mathbf{n}', s, \mathbf{a})$ è vera e subabbondante.*
- (ii) *Se $(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è superabbondante, allora per ogni $\mathbf{n}' \leq \mathbf{n}$, anche $T(\mathbf{n}', s, \mathbf{a})$ è vera e superabbondante.*

Dimostrazione. Proveremo solo il caso subabbondante. Per il caso superabbondante si procede in modo del tutto analogo. Inoltre consideriamo il caso in cui $n'_i = n_i$ per $i = 1, \dots, k-1$, e $n'_k = n_k + 1$. Con un argomento induttivo si avrà il caso generale.

Siano $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k}$ e $X' = \mathbb{P}^{n'_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n'_k}$. Consideriamo $V'_i = V_i$, per $i = 1, \dots, k-1$ e $V'_k = V_k \oplus \langle w \rangle$. Abbiamo dunque l'immersione di X in X' , data dalla somma diretta:

$$V'_1 \otimes \dots \otimes V'_k = (V_1 \otimes \dots \otimes V_k) \oplus (V_1 \otimes \dots \otimes V_{k-1} \otimes \langle w \rangle).$$

Sia $p \in X$, con $p = v_1 \otimes \dots \otimes v_k$. Si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned} T_p X' &= T_p X \oplus \langle v_1 \otimes \dots \otimes v_{k-1} \otimes w \rangle \\ G_p^i X' &= G_p^i X \quad \text{per } i = 1, \dots, k-1 \\ G_p^k X' &= G_p^k X \oplus \langle v_1 \otimes \dots \otimes v_{k-1} \otimes w \rangle \end{aligned}$$

A questo punto è facile verificare che, se sono indipendenti i $T_{p_i} X$ e $G_{q_{t,j}}^t X$ in corrispondenza di $s+a_1+\dots+a_k$ punti generali, per la subabbondanza sono indipendenti anche i $T_{p_i} X'$ e i $G_{q_{t,j}}^t X'$: infatti, considerando la scrittura in somma diretta, gli addendi sinistri sono indipendenti per ipotesi, e quelli destri sono indipendenti (tra loro e con gli altri sottospazi) in quanto i punti sono presi in posizione generale. \square

2.3 Varietà difettive

Dimostriamo ora un fondamentale risultato che ci fornirà un criterio sufficiente per garantire che alcune particolari varietà di Segre abbiano una o più secanti difettive.

Proposizione 2.14 (v. [AOP], Lemma 4.1). *Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k}$, con $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$ e $k \geq 3$. Sia $d \in \mathbb{N}$ un valore tale che:*

$$\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - \sum_{i=1}^{k-1} n_i < d < \min \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1), n_k + 1 \right\}. \quad (2.11)$$

Allora $\sigma_d(X)$ è difettiva.

Dimostrazione. Consideriamo V_1, \dots, V_k spazi vettoriali tali che $\dim V_i = n_i + 1$, e d punti di X , p_1, \dots, p_d , in posizione generale della forma $p_j = v_1 \otimes \dots \otimes v_k$. Poiché $d < n_k + 1$, esiste un sottospazio D di V_k tale che la varietà $Y = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_{k-1}} \times \mathbb{P}^D$ contiene i d punti considerati. Sia W il complemento di D in V_k ; dunque $V_k = D \oplus W$ e ovviamente $\dim W = n_k + 1 - d$. Siano $N(d) = d \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - 1$ e $N = \prod_{i=1}^k (n_i + 1) - 1$. La varietà di Segre Y è immersa in $\mathbb{P}^{N(d)} \subseteq \mathbb{P}^N$. Consideriamo L , lo spazio generato dagli spazi tangenti a X nei d punti considerati:

$$L = \sum_{j=1}^d T_{p_j} X = \left[\sum_{j=1}^d T_{p_j} Y \right] \oplus \left[\sum_{j=1}^d (v_1 \otimes \dots \otimes v_{k-1} \otimes W) \right].$$

Il primo addendo ha dimensione al più $N(d) + 1$ mentre il secondo ha dimensione al più $d(n_k + 1 - d)$. Sia dunque $F(d) = d \left[\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) + (n_k + 1 - d) \right]$ la dimensione massima che può essere assunta dallo spazio L . Per il Lemma di Terracini si ottiene che la dimensione di $\sigma_d(X)$ non può superare $F(d) - 1$. Mostriamo che $F(d) - 1$ è minore della dimensione aspettata di $\sigma_d(X)$. Valgono infatti:

$$\begin{aligned} d \left[\binom{k}{\sum_{i=1}^k n_i} + 1 \right] - F(d) &= d \left[\binom{k}{\sum_{i=1}^k n_i} + 1 \right] - d \left[\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) + (n_k + 1 - d) \right] = \\ &= d \left[\sum_{i=1}^{k-1} n_i - \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) + d \right] > 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k (n_i + 1) - F(d) &= d^2 - d \left[\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) + (n_k + 1) \right] + \prod_{i=1}^k (n_i + 1) = \\ &= \left[d - \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) \right] [d - (n_k + 1)] > 0. \end{aligned}$$

Dunque $F(d) < \min \left\{ d \left(\sum_{i=1}^k n_i + 1 \right), \prod_{i=1}^k (n_i + 1) \right\}$ e perciò la secante $\sigma_d(X)$ è difettiva. \square

Il criterio fornito da questo risultato suggerisce che una varietà di Segre in cui la dimensione di uno dei fattori è *molto più alta* rispetto a quella degli altri, ha sicuramente una o più varietà secanti difettive. Per individuare le varietà di Segre in cui si verifica questa situazione diamo la seguente definizione:

Definizione 2.15. Sia $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ con $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$ e $k \geq 3$. Si dice che \mathbf{n} è bilanciato se $\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - \sum_{i=1}^{k-1} n_i \geq n_k$. Altrimenti si dice che \mathbf{n} è sbilanciata. In alternativa potremo dire che la varietà di Segre $\mathbb{P}^{\mathbf{n}}$ è bilanciata o sbilanciata.

Osservazione 2.16. Una varietà di Segre X sbilanciata ammette almeno un valore d per cui vale la d -secante è difettiva. Infatti è immediato verificare che il valore $d = \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - \sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1$ soddisfa la (2.11) e dunque $\sigma_d(X)$ è difettiva.

La Proposizione 2.14 ci fornisce un pratico strumento per dimostrare che alcune affermazioni della forma $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ sono false. Considereremo infatti un'affermazione $T(\mathbf{N}, d, \mathbf{0})$, che descriva la difettività della d -esima secante di una varietà sbilanciata, e perciò falsa. Ridurremo tale affermazione secondo le regole dettate dai Teoremi 2.7 e 2.8. A questo punto potremo dimostrare che una particolare affermazione $T(\bar{\mathbf{n}}, \bar{s}, \bar{\mathbf{a}})$ tra quelle in cui è stata ridotta $T(\mathbf{N}, d, \mathbf{0})$ è falsa mostrando che tutte le altre sono vere. In altre parole, costruiremo un albero di riduzione per un'affermazione falsa $T(\mathbf{N}, d, \mathbf{0})$ in cui tra le foglie compare $T(\bar{\mathbf{n}}, \bar{s}, \bar{\mathbf{a}})$. Dimostrando che tutte le foglie eccetto $T(\bar{\mathbf{n}}, \bar{s}, \bar{\mathbf{a}})$ sono vere, si ottiene necessariamente che $T(\bar{\mathbf{n}}, \bar{s}, \bar{\mathbf{a}})$ è falsa. Per chiarire questa tecnica, che sarà la principale utilizzata per mostrare che un'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è falsa, proponiamo un esempio.

Esempio 2.17. La varietà di Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^{17}$ è sbilanciata e perciò la sua 16-secante è difettiva; dunque l'affermazione superabbondante $T(1, 2, 2, 17; 16; 0, 0, 0, 0)$ è falsa. Questa può essere ridotta in due copie di $T(1, 2, 2, 8; 8; 0, 0, 0, 8)$; anch'essa sarà falsa, per il Teorema 2.8. Questa può essere ridotta nelle due affermazioni superabbondanti $T(1, 2, 2, 5; 6; 0, 0, 0, 10)$ e $T(1, 2, 2, 2; 2; 0, 0, 0, 14)$. La prima delle due affermazioni si riduce in due copie di $T(1, 2, 2, 2; 3; 0, 0, 0, 13)$: si può verificare, con l'uso del calcolatore, che questa affermazione è vera. Si può quindi concludere per il Teorema 2.8 che l'affermazione $T(1, 2, 2, 2; 2; 0, 0, 0, 14)$ è falsa. In Figura 2.1 è rappresentata la riduzione che abbiamo descritto.

Il risultato seguente descrive un caso in cui la Proposizione 2.14 viene utilizzata per dimostrare che un'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ di una particolare forma è sempre falsa.

Lemma 2.18. Siano n_1, \dots, n_k, d, p interi positivi, con $1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k$ e $k \geq 3$ tali che

$$2^{-p} \left(\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - \sum_{i=1}^{k-1} n_i \right) < d < \min \left\{ n_k + 1, 2^{-p} \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) \right\}. \quad (2.12)$$

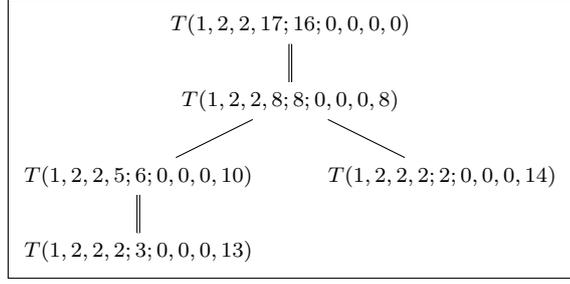


Figura 2.1: $T(1, 2, 2, 2; 2; 0, 0, 0, 14)$ è falsa

Allora $T(n_1, \dots, n_k; d; 0, \dots, 0, d(2^p - 1))$ è falsa.

Dimostrazione. Indichiamo con \mathcal{T}_0 l'affermazione $T(n_1, \dots, n_k; d; 0, \dots, 0, d(2^p - 1))$. Seguendo le regole di riduzione dei Teoremi 2.7 e 2.8, da due copie di \mathcal{T}_0 si ottiene l'affermazione $\mathcal{T}_1 = T(n_1, \dots, 2n_k + 1; 2d; 0, \dots, 0, 2d(2^{p-1} - 1))$. \mathcal{T}_1 è della stessa forma di \mathcal{T}_0 , considerando $d_1 = 2d$, $p_1 = p - 1$, $n_{k,1} = 2n_k + 1$. Con un argomento induttivo è facile dimostrare che dopo p passi di questo tipo si ottiene l'affermazione $\mathcal{T}_p = T(n_1, \dots, n_{k-1}, N_k; D; \mathbf{0})$ dove $N_k = 2^p(n_k + 1) - 1$ e $D = 2^p d$. Se si potesse garantire che l'affermazione \mathcal{T}_p è falsa, potremmo concludere che anche \mathcal{T}_0 è falsa.

La condizione affinché per \mathcal{T}_p valgano le ipotesi della Proposizione 2.14 è la seguente:

$$\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - \sum_{i=1}^{k-1} n_i < D < \min \left\{ N_k + 1, \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) \right\}. \quad (2.13)$$

La validità di (2.12) garantisce che valga anche (2.13). Dunque \mathcal{T}_p è falsa per la Proposizione 2.14 e dunque anche \mathcal{T}_0 è falsa. \square

Nell'esempio seguente presentiamo un caso in cui può essere applicato il Lemma 2.18:

Esempio 2.19. Consideriamo l'affermazione $T(1, 1, 8, 11; 5; 0, 0, 35, 0)$. Questa affermazione soddisfa le ipotesi del Lemma 2.18 relativamente al terzo fattore, con $d = 5$, $p = 3$. La diseuguaglianza (2.12), prende la forma:

$$\frac{35}{8} < 5 < \min\{9, 6\},$$

che è vera. Dunque $T(1, 1, 8, 11; 5; 0, 0, 35, 0)$ è falsa.

Si può provare che le varietà di Segre con soli due fattori hanno sempre alcune varietà secanti difettive. In particolare vale il seguente risultato, ripreso da [La].

Proposizione 2.20. *Siano V e W spazi vettoriali con $\dim V = n + 1$ e $\dim W = m + 1$. Sia $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ e sia $d \leq \min\{n, m\}$. Allora:*

$$\dim \sigma_d(X) = \min \{(n + 1)(m + 1) - 1, d(n + m - d + 2) - 1\}. \quad (2.14)$$

Dimostrazione. Sia p un punto generale di $\sigma_d(X)$. Possiamo supporre $p = \sum_1^d v_i \otimes w_i$ con v_1, \dots, v_d e w_1, \dots, w_d indipendenti tra loro, altrimenti si avrebbe $p \in \sigma_{d-1}(X)$.

Per il Lemma di Terracini si ha:

$$\begin{aligned} T_p \sigma_d(X) &= \sum_{i=1}^d T_{v_i \otimes w_i} X = \\ &= \sum_{i=1}^d (V \otimes w_i + v_i \otimes W) = \\ &= V \otimes \langle w_1, \dots, w_d \rangle + \langle v_1, \dots, v_d \rangle \otimes W. \end{aligned}$$

Poiché $[V \otimes \langle w_1, \dots, w_d \rangle] \cap [\langle v_1, \dots, v_d \rangle \otimes W] = \langle v_1, \dots, v_d \rangle \otimes \langle w_1, \dots, w_d \rangle$, si ha che:

$$\begin{aligned} \dim [V \otimes \langle w_1, \dots, w_d \rangle] &= (n+1)d, \\ \dim [\langle v_1, \dots, v_d \rangle \otimes W] &= d(m+1), \\ \dim [\langle v_1, \dots, v_d \rangle \otimes \langle w_1, \dots, w_d \rangle] &= d^2. \end{aligned}$$

Per la Formula di Grassmann si ottiene quindi che, se $T_p \sigma_d(X)$ non satura l'ambiente, allora ha dimensione $d(n+m+2-d) - 1$.

Poiché $\dim(\mathbb{P}(V \otimes W)) = (n+1)(m+1) - 1$, si ottiene la tesi. □

Da questo risultato si deduce che, data $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, allora tutte le d -secanti di X con $d \leq \min\{n+1, m+1\}$, eccetto che per $d=1$, sono difettive.

Un curioso esempio di una classe di varietà di Segre che hanno esattamente una secante difettiva è descritto dalla Proposizione 4.7 di [AOP]:

Proposizione 2.21 (v. [AOP], Prop. 4.7). *Sia $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ una varietà di Segre. Allora valgono le affermazioni seguenti:*

- $\sigma_{2n+1}(X)$ è difettiva;
- $\sigma_s(X)$ è non difettiva per $s \neq 2n+1$.

Dimostrazione. Consideriamo $2n+1$ punti generali di X . Evidentemente si ha che $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$, con $\dim V = \dim W = 2n+2$. I sottospazi H_1 e H_2 generati rispettivamente in V e W dalle proiezioni dei $2n+1$ punti considerati definiscono degli iperpiani. Lo spazio $H_1 \otimes W + V \otimes H_2$ definisce un iperpiano di $V \otimes W$ che contiene gli spazi tangenti a X nei $2n+1$ punti considerati e dunque il tangente a $\sigma_{2n+1}(X)$. Una considerazione analoga può essere fatta ordinando in modo diverso i fattori di X : si determina quindi un altro iperpiano che contiene lo

spazio tangente a $\sigma_{2n+1}(X)$. Perciò il tangente a $\sigma_{2n+1}(X)$ ha almeno codimensione 2; poiché la dimensione aspettata è $4n^2 + 8n + 3$, se la secante fosse non difettiva, il tangente avrebbe codimensione 1.

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato è sufficiente mostrare che $T(1, 1, n, n; 2n; 0^4)$ e $T(1, 1; n, n; 2n + 2; 0^4)$ sono vere. La prima affermazione si riduce sul primo fattore a due copie di $T(0, 1, n, n; n; n, 0^3)$ e quindi per la Proposizione 2.11 a $T(1, n, n; n; 0^3)$. Quest'affermazione può essere ridotta sul terzo fattore a n copie di $T(1, n, 0; 1; 0, 0, n - 1)$ e $T(1, n, 0; 0; 0, 0, n)$, entrambe vere. Perciò per il Teorema 2.7 $\sigma_{2n}(X)$ è non difettiva.

Infine l'affermazione $T(1, 1, n, n; 2n + 2; 0^4)$ può essere ridotta sul quarto fattore a $n + 1$ copie di $T(1, 1, n, 0; 2; 0^3, 2n)$. Quest'affermazione è vera perché la validità di $T(1, n, n; 2; 0^3)$ è garantita dal fatto che le 2-secanti non sono mai difettive. \square

Capitolo 3

Il risultato di Lickteig sulle varietà cubiche

In questo capitolo, ripercorrendo i risultati presentati in [Li1], dimostreremo che le varietà di Segre cubiche, cioè quelle della forma $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, non hanno secanti difettive, eccetto nel caso della 4-secante di $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. I risultati vengono almeno in parte, presentati con le notazioni del capitolo precedente.

3.1 Risultati preliminari

Iniziamo con un risultato tecnico, che si rivelerà estremamente utile in seguito.

Proposizione 3.1. *L'affermazione $T(n, m, \ell; s; a_1, a_2, 0)$ è vera e equiabbondante nei casi seguenti:*

1. $n = 0, s = 1, a_1 = m\ell, a_2 = 0$;
2. $s = 0, \ell + 1 = (\ell_1 + 1) + (\ell_2 + 1), a_1 = (m + 1)(\ell_1 + 1), a_2 = (n + 1)(\ell_2 + 1)$;
3. $n = m = 1, s = 0, 2 \leq a_1 \leq a_2, a_1 + a_2 = 2(\ell + 1)$;
4. $n = m = 1, s = 2, 2 + a_1 + a_2 = \ell + 1$;
5. $n = m = 2, s = 3, a_1 = a_2 = \ell - 1, \ell \geq 3$.

Dimostrazione. Consideriamo U, V, W spazi vettoriali con $n + 1 = \dim U$, $m + 1 = \dim V$ e $\ell + 1 = \dim W$. Sia inoltre $X = \mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$. In ognuno dei casi considerati, mostreremo che lo spazio $L = T_s X + G_{a_1}^1 X + G_{a_2}^2 X$ ha la dimensione dell'ambiente.

1. Si verifica facilmente che $T(0, m, \ell; 1; m\ell, 0, 0)$ è equiabbondante. Inoltre è vera per la Proposizione 2.11 in quanto l'affermazione $T(0, m, \ell; 1; 0, 0, 0)$ è sempre vera e subabbondante.

2. Si verifica facilmente che $T(n, m, \ell_1 + \ell_2 + 1; 0; (m + 1)(\ell_1 + 1), (n + 1)(\ell_2 + 1), 0)$ è equiabbondante. Sia dunque $W = F^1 \oplus F^2$ con $\dim F^1 = \ell_1 + 1$ e $\dim F^2 = \ell_2 + 1$.

Siano u_0, \dots, u_n una base di U , v_0, \dots, v_m una base di V , w_0, \dots, w_{ℓ_1} una base di F^1 e $w_{\ell_1+1}, \dots, w_\ell$ una base di F^2 . Scegliamo a_1 punti generali della forma $u_i \otimes v \otimes w_k$ con v arbitrario ($i = 0, \dots, n, k = 0, \dots, \ell_1$), e a_2 punti generali della forma $u \otimes v_j \otimes w_k$ con u arbitrario ($j = 0, \dots, m, k = \ell_1 + 1, \dots, \ell$). Con questa scelta lo spazio $L = G_{a_1}^1 X + G_{a_2}^2 X$ ha la dimensione aspettata.

3. Anche in questo caso si verifica direttamente che $T(1, 1; \frac{a_1+a_2}{2} - 1; 0; a_1, a_2, 0)$ è equiabbondante. Se a_1 e a_2 sono pari, allora si ricade in un caso immediatamente riconducibile a 2.. Supponiamo quindi a_1 dispari da cui si ottiene facilmente che $\dim W \geq 3$. Consideriamo dunque $W = F^1 \oplus F^2$ con $\dim F^1 = 3$. Consideriamo $a_1 + a_2$ punti generali di X scelti come segue: p_1, \dots, p_{a_1} della forma $p_i = u_i \otimes v_i \otimes w_i$, con $w_i \in F^1$ per $i = 1, 2, 3$ e $w_i \in F^2$ per $i > 3$, e q_1, \dots, q_{a_2} della forma $q_i = u'_i \otimes v'_i \otimes w'_i$, con $w'_i \in F^1$ per $i = 1, 2, 3$ e $w'_i \in F^2$ per $i > 3$. Con questa scelta dei punti si ha:

$$L = G_{a_1}^1 + G_{a_2}^2 = \left(\sum_{i=1}^3 (Uv_iw_i + u'_iVw'_i) \right) \oplus \left(\sum_{i=4}^{a_1} Uv_iw_i + \sum_{i=4}^{a_2} u'_iVw'_i \right).$$

Possiamo osservare che $\sum_{i=1}^3 (Uv_iw_i + u'_iVw'_i) = U \otimes V \otimes F^1$, in quanto l'affermazione $T(1, 1, 2; 0; 3, 3, 0)$ è vera ed equiabbondante. Perciò il primo addendo diretto ha la dimensione aspettata. Per dimostrare che anche il secondo addendo diretto ha la dimensione aspettata, osserviamo che $T(1, 1, \frac{a_1+a_2}{2} - 3; a_1 - 3, a_2 - 3, 0)$ è della forma descritta al punto 2. e perciò è vera ed equiabbondante.

4. L'affermazione $T(1, 1, a_1 + a_2 + 1; 2; a_1, a_2, 0)$ è equiabbondante. Consideriamo $W = F^1 \oplus F^2 \oplus F^3$, dove $\dim F^1 = 2$, $\dim F^2 = a_1$ e $\dim F^3 = a_2$. Scegliamo $p_1, p_2, q_1^1, \dots, q_{a_1}^1, q_1^2, \dots, q_{a_2}^2$ punti generali di X della forma seguente: $p_j = u_j v_j w_j$ con $w_j \in F^1$, $q_j^1 = u'_j v'_j w'_j$ con $w'_j \in F^2$ e $q_j^2 = u''_j v''_j w''_j$ con $w''_j \in F^3$. Posta $Y = \mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}F^1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} L &= T_2 X + G_{a_1}^1 X + G_{a_2}^2 X = \\ &= T_2 Y \oplus \left(\sum_{j=1}^{a_1} Uv'_jw'_j + u_1v_1F^2 + u_2v_2F^2 \right) \oplus \left(\sum_{j=1}^{a_2} u''_jVw''_j + u_1v_1F^3 + u_2v_2F^3 \right). \end{aligned}$$

Il primo addendo diretto ha la dimensione aspettata, in quanto l'affermazione $T(1, 1, 1; 2; 0, 0, 0)$ è vera ed equiabbondante. Il secondo e il terzo caso corrispondono rispettivamente alle affermazioni $T(1, 1, a_1 - 1; 0; a_1, 0, 2)$ e $T(1, 1, a_2 - 1; 0; 0, a_2, 2)$, che sono della forma descritta in 2. (scambiando nel primo caso il secondo e il terzo fattore e nel secondo caso il primo e il terzo fattore).

5. L'affermazione $T(2, 2, \ell; 3; \ell - 1, \ell - 1, 0)$ è equiabbondante. Poiché $\ell \geq 3$ consideriamo $W = F^1 \oplus F^2$ con $\dim F^1 = 2$. Consideriamo $3 + 2(\ell - 1)$ punti generali $p_1, p_2, p_3, q_1^1, \dots, q_{\ell-1}^1, q_1^2, \dots, q_{\ell-1}^2$ della forma seguente: $p_j = u_j v_j w_j$ con $w_j \in F^1$, u_1, u_2, u_3 base di U e $v_1 = v_2$; $q_j^1 = u'_j v'_j w'_j$ e $q_j^2 = u''_j v''_j w''_j$ con $w'_j, w''_j \in F^2$. Posta $Y = \mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}F^1$, vale che:

$$\begin{aligned}
 L &= T_3X + G_{\ell-1}^1X + G_{\ell-1}^2X = \\
 &= T_3Y \oplus \left[\sum_{j=1}^{\ell-1} (Uv'_jw'_j + u''_jVw''_j) + \sum_{i=1}^3 u_iv_iF^2 \right].
 \end{aligned}$$

Il primo addendo diretto ha la dimensione aspettata in quanto $T(2, 2, 1; 3; 0, 0, 0)$ è vera ed equiabbondante. Indichiamo con L^* il secondo addendo diretto. Definiamo due sottospazi di L , indicati con L_1 e L_2 :

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \sum_{j=1}^{\ell-1} u''_j \langle v_1 \rangle w''_j + u_1v_1F^2 + u_2v_2F^2; \\
 L_2 &= \sum_{j=1}^{\ell-1} \langle u_3 \rangle v'_jw'_j + u_3v_3F^2.
 \end{aligned}$$

Le affermazioni relative a questi due sottospazi sono rispettivamente $T(2, 0, \ell - 2; 0; 0, \ell - 1, 2)$ e $T(0, 1, \ell - 2; 0; \ell - 1, 0, 1)$. Queste due affermazioni rientrano nel caso descritto in 2. Usando le notazioni del caso 2. è sufficiente porre: per la prima affermazione $\ell_1 = 0, \ell_2 = 1, n = 0, m = \ell - 2$; per quanto riguarda invece la seconda affermazione si può considerare $\ell_1 = \ell_2 = 0, n = 1, m = \ell - 2$. Dunque le due affermazioni sono entrambe vere e perciò si ha $L_1 = U \otimes \langle v_1 \rangle \otimes F^2$ e $L_2 = \langle u_3 \rangle \otimes V \otimes F^2$. È immediato verificare che L_1 e L_2 sono sottospazi di L^* e perciò possiamo considerare il quoziente $L^*/(L_1 + L_2)$. Poiché i punti sono scelti in posizione generale, per ogni j si ha che u''_j non è parallelo a u_3 e che v'_j non è parallelo a v_1 . Inoltre i termini $u_iv_iF^2$ di L^* vengono ovviamente annullati al passaggio al quoziente. In particolare si ha che $L^*/(L_1 + L_2)$ è isomorfo allo spazio seguente:

$$\tilde{L} = \sum_{j=1}^{\ell-1} \left(\tilde{U}v'_jw'_j + u''_j\tilde{V}w''_j \right),$$

dove $\tilde{U} = U/\langle u_3 \rangle$ e $\tilde{V} = V/\langle v_1 \rangle$. Possiamo concludere osservando che \tilde{L} ha la dimensione aspettata: infatti l'affermazione $T(1, 1, \ell - 2; 0; \ell - 1, \ell - 1, 0)$ rientra nel caso trattato al punto 3. con $a_1 = a_2 = \ell - 1$. \square

A questo punto possiamo dare un primo risultato, che descrive in parte il caso di varietà di Segre cubiche in cui la dimensione degli spazi vettoriali considerati è divisibile per tre.

Teorema 3.2. *Siano U, V, W tre spazi vettoriali con $\dim U = \dim V = \dim W = n + 1$, dove $n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ e $n \neq 2$. Sia $X = \mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$. Allora $\sigma_s(X)$ è non difettiva se $s \leq \frac{(n+1)^2}{3}$ oppure se $s \geq \frac{(n+1)(n+2)}{3}$.*

Dimostrazione. Sia $\nu + 1 = \frac{n+1}{3}$ e siano $U = \bigoplus_{i=1}^{\nu+1} D^i$, $V = \bigoplus_{j=1}^{\nu+1} E^j$ con $\dim D^i = \dim E^j = 3$. Per l'Osservazione 2.5, è sufficiente mostrare che $\sigma_s(X)$ è non difettiva per $s = 3(\nu + 1)^2$ e $s = 3(\nu + 1)^2 + (\nu + 1)$.

$s = 3(\nu + 1)^2$. Consideriamo $3(\nu + 1)^2$ punti generali di X , che indichiamo con p_{ij}^k (con $i, j = 1, \dots, \nu + 1, k = 1, 2, 3$), della forma seguente: $p_{ij}^k = u_{ij}^k \otimes v_{ij}^k \otimes w_{ij}^k$, con $u_{ij}^k \in D^i$ e $v_{ij}^k \in E^j$. Poniamo $Y_{ij} = D^i \otimes E^j \otimes W$ e osserviamo che:

$$\begin{aligned} T_s X &= \sum_{i,j,k} T_{p_{ij}^k} X = \sum_{ijk} \left[T_{p_{ij}^k} Y_{ij} + \sum_{\alpha \neq i} D^\alpha v_{ij}^k w_{ij}^k + \sum_{\beta \neq j} u_{ij}^k E^\beta w_{ij}^k \right] = \\ &= \bigoplus_{i,j} \left[\sum_{k=1,2,3} T_{p_{ij}^k} Y_{ij} + \sum_{\substack{k=1,2,3 \\ \alpha \neq i}} D^\alpha v_{\alpha j}^k w_{\alpha j}^k + \sum_{\substack{k=1,2,3 \\ \beta \neq j}} u_{i\beta}^k E^\beta w_{i\beta}^k \right]. \end{aligned}$$

Indichiamo con L_{ij} gli addendi diretti di questa scrittura. Per dimostrare che $\sigma_s(X)$ ha la dimensione aspettata ci basta osservare che $L_{ij} = T_3 Y_{ij} + G_{3\nu}^1 Y_{ij} + G_{3\nu}^2 Y_{ij}$, che ha la dimensione aspettata se e solo se $T(2, 2, n; 3; 3\nu, 3\nu, 0)$ è vera. Quest'affermazione è subabbondante e la Proposizione 3.1.5. garantisce che l'affermazione $T(2, 2, n; 3; 3\nu + 1, 3\nu + 1, 0)$ sia vera ed equiabbondante. Dunque $T(2, 2, n; 3; 3\nu, 3\nu, 0)$ è vera e perciò $\sigma_s(X)$ è non difettiva.

$s = 3(\nu + 1)^2 + (\nu + 1)$. Consideriamo in questo caso $3(\nu + 1)^2$ punti generali di \bar{X} della stessa forma descritta nella prima parte della dimostrazione. Inoltre consideriamo altri $\nu + 1$ punti in posizione generale, che indichiamo con $q_1, \dots, q_{\nu+1}$, della forma seguente: $q_i = u'_i \otimes v'_i \otimes w'_i$ con $u'_i \in D^i$ e $v'_i \in E^i$. Analogamente a quanto fatto in precedenza, si può determinare una scrittura in addendi diretti di $T_s X$. In questo caso gli addendi diretti, che indichiamo questa volta con L'_{ij} , hanno la forma seguente:

$$\begin{aligned} L'_{ij} &= L_{ij} + D^i v'_j w'_j + u'_i E^j w'_i \quad \text{se } i \neq j, \\ L'_{ii} &= L_{ii} + D^i v'_i w'_i + u'_i E^i w'_i + u'_i v'_i W. \end{aligned}$$

Dunque risulta che $L'_{ij} = T_3 Y_{ij} + G_{3\nu+1}^1 Y_{ij} + G_{3\nu+1}^2$, se $i \neq j$, mentre $L_{ii} = T_4 Y_{ii}$. La dimensione del primo termine dipende dall'affermazione $T(2, 2, n; 3; 3\nu + 1, 3\nu + 1, 0)$, mentre il secondo termine dipende dall'affermazione $T(2, 2, n; 4; 3\nu, 3\nu, 0)$, entrambe vere e superabbondanti. Si ha dunque la tesi. \square

Prima di dare il risultato generale che riguarda le varietà di Segre cubiche, abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari. Richiamiamo, riformulandolo secondo le nostre notazioni, un risultato dovuto a Strassen (cfr. [St]):

Teorema 3.3. *Le affermazioni seguenti sono vere ed equiabbondanti:*

- $T(n, n, n + 2; \frac{(n+1)(n+3)}{3}; 0, 0, 0)$ con $n \not\equiv 1 \pmod{3}$;
- $T(n, n, n - 1; \frac{(n+1)^2}{3}; 0, 0, 0)$ con $n \equiv 2 \pmod{3}$.

In particolare $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n+2}$ con $n \not\equiv 1 \pmod{3}$ e $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ con $n \equiv 2 \pmod{3}$ sono perfette.

Vengono presentati alcuni risultati che ci saranno utili per dimostrare il Teorema 3.7. Per evitare notazioni particolarmente pesanti, adottiamo quelle utilizzate in [Li1].

Dati tre spazi vettoriali U, V, W , con $\dim U = n$, $\dim V = m$, $\dim W = \ell$ supponiamo di avere le seguenti decomposizioni in somma diretta:

$$U = \bigoplus_{i=0}^{\nu} D^i, \quad V = \bigoplus_{j=0}^{\mu} E^j, \quad W = \bigoplus_{k=0}^{\lambda} F^k.$$

Dati I, J, K tre insiemi di indici, rispettivamente sottoinsiemi di $\{1, \dots, \nu\}$, $\{1, \dots, \mu\}$ e $\{1, \dots, \lambda\}$, indicheremo con S_{IJK} la varietà di Segre definita da:

$$S_{IJK} = \mathbb{P}D^I \times \mathbb{P}E^J \times \mathbb{P}F^K,$$

dove $D^I = \bigoplus_{i \in I} D^i$, $E^J = \bigoplus_{j \in J} E^j$, $F^K = \bigoplus_{k \in K} F^k$. In questo caso, se abbiamo dei punti $p_1, \dots, p_s \in X$, potremo indicare, con un abuso di notazione, $\sigma \in IJK$, intendendo che $p_\sigma \in S_{IJK}$, per qualche $\sigma = 1, \dots, s$. Quindi con IJK indicheremo anche il sottoinsieme di $\{1, \dots, s\}$ degli indici σ per cui $p_\sigma \in S_{IJK}$. Questa notazione, apparentemente poco chiara, risulterà particolarmente utile quando verranno utilizzate delle sommatorie. Per fare un esempio, indicheremo con $\sum_{\sigma \in IJK} T_{p_\sigma} X$ lo spazio generato dalla somma degli spazi tangenti a X nei punti p_σ tali che $p_\sigma \in S_{IJK}$. Per semplicità, quando si vorrà indicare l'intero spazio vettoriale si utilizzerà il simbolo A per il corrispondente insieme di indici: ad esempio S_{AAK} è la varietà di Segre $\mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}F^K$.

Inoltre, dato $p = u \otimes v \otimes w \in X = \mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$, indicheremo con D_p il sottospazio $D \otimes v \otimes w$ di $U \otimes V \otimes W$ (cioè, secondo la notazione del capitolo precedente, $D_p = G_p^1 X$), e analogamente $E_p = u \otimes E \otimes w$ e $F_p = u \otimes v \otimes W$.

Lemma 3.4 ([Li1], Lemma 4.3). *Siano U, V, W spazi vettoriali, con $U = D^1 \oplus D^2$ e $V = E^1 \oplus E^2$, con $\dim U = n + 1$, $\dim V = m + 1$, $\dim W = \ell + 1$ e $\dim D^i = n_i + 1$, $\dim E^i = m_i + 1$ per $i = 1, 2$. Sia $X = \mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$. Siano s, a_1, a_2, b_1, b_2 numeri naturali e siano $p_\sigma, q_{\alpha_1}^1, q_{\alpha_2}^2, r_{\beta_1}^1, r_{\beta_2}^2$ ($\sigma = 1, \dots, s, \alpha_i = 1, \dots, a_i, \beta_i = 1, \dots, b_i$) punti generali di X tali che: $p_\sigma, q_{\alpha_1}^1, q_{\alpha_2}^2 \in D^2 \otimes E^2 \otimes W$ e $r_{\beta_1}^1 \in D^1 \otimes V \otimes W$, $r_{\beta_2}^2 \in U \otimes E^1 \otimes W$. Sia L lo spazio definito da:*

$$L = \sum_{\sigma=1}^s (D_{p_\sigma}^1 + E_{p_\sigma}^1) + \sum_{\alpha_1=1}^{a_1} D_{q_{\alpha_1}^1}^1 + \sum_{\alpha_2=1}^{a_2} E_{q_{\alpha_2}^2}^1 + \sum_{\beta_1=1}^{b_1} W_{r_{\beta_1}^1} + \sum_{\beta_2=1}^{b_2} W_{r_{\beta_2}^2}.$$

Allora si verifica che $L = D^1 \otimes V \otimes W + U \otimes E^1 \otimes W$ nei due casi seguenti:

1. $s + a_1 \equiv s + a_2 \equiv 0 \pmod{\ell + 1}$,
 $s + a_1 \leq (\ell + 1)(m_2 + 1)$,
 $s + a_2 \leq (\ell + 1)(n_2 + 1)$,
 $b_1 \leq \left[(m + 1) - \frac{s + a_1}{\ell + 1} \right] (n_1 + 1)$,

$$b_2 \leq \left[(n+1) - \frac{s+a_2}{\ell+1} \right] (m_1+1),$$

$$b_1+b_2 \leq \left[(m+1) - \frac{s+a_1}{\ell+1} \right] (n_1+1) + \left[(n+1) - \frac{s+a_2}{\ell+1} \right] (m_1+1) - (n_1+1)(m_1+1).$$

2. $n = m \geq 2$, $\ell = 1$,

$$n_1 = m_1 = 0$$

$3 \leq s \leq 2n - 3$, s dispari,

$$a_1 = a_2 = 0,$$

$$b_1 = b_2 = (n+1) - \frac{s+1}{2}.$$

Lemma 3.5 ([Li1], Lemma 4.6). *Sia $n \geq 4$ e siano U, V, W spazi vettoriali di dimensione $n+1$ e sia $X = \mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$. Sia $U = D^0 \oplus D^*$ e $V = E^0 \oplus E^*$, con $\dim D^0 = \dim E^0 = 2$. Siano $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_a$ punti generali di X , con $s \in [\min\{n, 8\}, n+1]$, tali che $q_j \in \mathbb{P}D^* \times \mathbb{P}E^* \times \mathbb{P}W$. Sia L definito da:*

$$\left[\sum_{i=1}^s T_{p_i} X + \sum_{j=1}^a (D_{q_j}^0 + E_{q_j}^0) \right] / D^* \otimes E^* \otimes W.$$

Allora L ha la dimensione aspettata.

Dimostrazione. Dimostreremo il risultato nel caso particolare in cui n è dispari e s è pari. Sia $\nu = \frac{n+1}{2}$ e sia $W = \bigoplus_{k=1}^{\nu} F^k$. Sia $\sigma = \frac{s}{2}$. Poiché $s \leq n+1$, possiamo supporre che $\{1, \dots, s\} = AA1 \cup \dots \cup AA\nu$, in modo che, per ogni $k = 1, \dots, \nu$, si ha che AAk contiene 0 oppure 2 punti scelti in p_1, \dots, p_s . Più precisamente possiamo scegliere k_1, \dots, k_{σ} indici distinti in $\{1, \dots, \nu\}$ e considerare i punti p_i , ridenotandoli con p_j^{ϵ} (con $\epsilon = 0, 1$ e $j = 1, \dots, \sigma$), nel modo seguente:

$$p_j^{\epsilon} \in \mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}F^{k_j}.$$

Inoltre, poiché per ipotesi si ha $q_j \in \mathbb{P}D^* \times \mathbb{P}E^* \times \mathbb{P}W$, potremo indicare $j \in **k$ per qualche $k \in \{1, \dots, \nu\}$.

Considerando le decomposizioni in forma diretta, lo spazio L ha la forma:

$$\bigoplus_{k=1}^{\nu} \left[\sum_{AAk} T_{p_i} S_{AAk} + \sum_{**k} (D_{q_j}^0 + E_{q_j}^0) + \sum_{\sqcup_{\gamma \neq k} AA\gamma} F_{p_i}^k \right] / D^* \otimes E^* \otimes W.$$

Indichiamo con L_k il k -esimo addendo diretto di questa scrittura. Evidentemente si ha che $L_k \subseteq U \otimes V \otimes F^k / D^* \otimes E^* \otimes W$.

Mostreremo che, per un'opportuna scelta dell'intero a , lo spazio L_k ha la dimensione aspettata e questa coincide esattamente con la dimensione di $U \otimes V \otimes F^k / D^* \otimes E^* \otimes W$. Una volta dimostrato questo, con un argomento analogo a quello utilizzato nell'Osservazione 2.5, risulterà che la tesi è valida per ogni valore di a .

Considereremo quindi il caso particolare in cui i punti q_j tali che $j \in **k$ sono $(n+1) - \frac{s-2}{2} + 1$ se in AAk sono presenti 2 indici dei p_i , mentre sono $2(n+1) - \frac{s+4}{2}$, se in AAk non sono presenti indici dei p_i .

Nel primo caso consideriamo le seguenti decomposizioni in somma diretta:

$$D^* = D^1 \oplus D^2, \quad E^* = E^1 \oplus E^2,$$

dove $\dim D^1 = \dim D^2 = \frac{s-2}{2}$. Supponiamo che i due punti $p_i \in S_{AAk}$ siano in S_{00k} che i punti $q_j \in S_{**k}$ siano in S_{22k} e che le restanti $\sigma - 1$ coppie di punti $p_j^\epsilon \in AAk_j$ siano scelte in modo che $p_j^0 \in 10k_j$ e $p_j^1 \in 01k_j$.

Con questa scelta dei punti si ottiene, grazie alle decomposizioni in somma diretta:

$$\begin{aligned} L_k = & \left[\left(\sum_{00k} T_{p_i} S_{00k} \right) \oplus \right. \\ & \oplus \left(\sum_{00k} D_{p_i}^1 + \sum_{\sqcup_{\gamma \neq k} 10\gamma} F_{p_i}^k \right) \oplus \left(\sum_{00k} E_{p_i}^1 + \sum_{\sqcup_{\gamma \neq k} 01\gamma} F_{p_i}^k \right) \oplus \\ & \left. \oplus \left(\sum_{00k} D_{p_i}^2 + \sum_{22k} E_{q_j}^0 \right) \oplus \left(\sum_{00k} E_{p_i}^2 + \sum_{22k} D_{q_j}^0 \right) \right] / D^* \otimes E^* \otimes F^k \end{aligned}$$

Ciascuno degli addendi diretti di questa scrittura corrisponde a un'affermazione equiabbondante che risulta vera per la Proposizione 3.1:

- il primo addendo corrisponde all'affermazione $T(1^3; 2; 0^3)$, che è vera;
- il secondo addendo è lo spazio relativo all'affermazione $T(\frac{s-2}{2}-1, 1, 1; 0; 2, 0, \frac{s-2}{2})$, in quanto $\dim D^1 = \frac{s-2}{2}$; questa affermazione è vera per la Proposizione 3.1.3;
- il terzo addendo ha una forma analoga al secondo, e dunque l'affermazione corrispondente è vera e subabbondante.
- il quarto addendo corrisponde all'affermazione $T(n - \frac{s}{2}, 1, 1; 0; 2, n - \frac{s}{2}, 0)$, in quanto $\dim D^2 = \dim D^* - \dim D^1 = n - 1 - \frac{s-2}{2}$; anche questa affermazione rientra nel caso trattato dalla Proposizione 3.1.3;
- infine il quinto addendo ha una forma analoga al quarto, e quindi l'affermazione corrispondente è vera.

Perciò L_k può essere scritto in somma diretta nel modo seguente:

$$L_k = \left[\bigoplus_{\substack{0 \leq i, j \leq 2 \\ ij = 0}} D^i \otimes E^j \otimes F^k \right] / D^* \otimes E^* \otimes W$$

Questo dimostra che, nel caso in cui siano due i punti p_i in S_{AAk} , allora L_k ha la dimensione aspettata che coincide satura l'ambiente $U \otimes V \otimes F_k/D^* \otimes E^* \otimes W$.

Consideriamo dunque il caso in cui nessuno dei punti p_i sia in S_{AAk} , dunque risulta:

$$L_k = \left[\sum_{**k} (D_{q_j}^0 + E_{q_j}^0) + \sum_{\sqcup_{\gamma \neq k} AA\gamma} F_{p_i}^k \right] / D^* \otimes E^* \otimes W.$$

Indichiamo con a_k il valore $2(n+1) - \frac{s+4}{2}$, cioè il numero dei punti q_j presi in S_{**k} . Se a_k è pari, allora L_k è della forma descritta dal Lemma 3.4.1; si può infatti verificare, considerando che $a_k \leq 2(n-2)$, che le ipotesi del Lemma 3.4.1 sono verificate. Supponiamo dunque che a_k sia dispari. In questo caso consideriamo la decomposizione in somma diretta data da:

$$D^* = D^1 \oplus D^2, \quad E^* = E^1 \oplus E^2,$$

con $\dim D^2 = \dim E^2 = 3$. Consideriamo inoltre tre dei punti q_j in S_{22k} e i restanti in S_{11k} . Inoltre poiché i punti $p_i \in S_{AA\gamma}$ compaiono solo negli spazi $F_{p_i}^k$, possiamo supporre per semplicità che tali punti siano in AAk , dal momento che comunque il vettore w_i non ha alcuna rilevanza. Supponiamo che di tali punti, tre siano S_{02k} , tre in S_{20k} e i restanti in $S_{(01)(01)k}$. Con queste scelte, L_k assume la forma seguente:

$$L_k = \left[\left(\sum_{11k} (D_{q_j}^0 + E_{q_j}^0) + \sum_{(01)(01)k} F_{p_i}^k \right) + \left(\sum_{22k} D_{q_j}^0 + \sum_{02k} F_{p_i}^k \right) + \left(\sum_{22k} E_{q_j}^0 + \sum_{20k} F_{p_i}^k \right) \right] / D^* \otimes E^* \otimes W.$$

Anche in questo caso, ciascuno degli addendi corrisponde ad una affermazione equiabbondante e vera:

- considerando che i punti in S_{11k} sono $a_k - 3$, è possibile applicare il Lemma 3.4.1, e dunque il primo addendo coincide con $D^{(01)} \otimes E^{(01)} \otimes F^k$;
- il secondo addendo corrisponde all'affermazione $T(1, 2, 1; 0; 3, 0, 3)$, che è vera ed equiabbondante.
- il terzo addendo corrisponde all'affermazione $T(2, 1, 1; 0; 0, 3, 3)$, anch'essa vera ed equiabbondante.

Questo conclude la dimostrazione, in quanto per ogni k la dimensione di L_k coincide con quella aspettata e con quella dell'ambiente. Scegliendo un valore qualsiasi dell'intero a , con un argomento analogo a quello utilizzato per l'Osservazione 2.5, si può mostrare che lo spazio L ha sempre la dimensione aspettata. \square

Lemma 3.6 ([Li1], Lemma 4.7). *Siano U, V, W spazi vettoriali di dimensione $n + 1$ e sia $X = \mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$. Sia $U = D^0 \oplus D^*$, $V = E^0 \oplus E^*$ e $W = F^0 \oplus F^*$, con $\dim D^0 = \dim E^0 = 1$ e $\dim F^0 = 2$. Siano $p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_a$ punti generali di X , con $s \in [6, n]$, tali che $q_j \in \mathbb{P}D^* \times \mathbb{P}E^* \times \mathbb{P}F^*$. Sia L definito da:*

$$\left[\sum_{i=1}^s T_{p_i} X + \sum_{j=1}^a \left(D_{q_j}^1 + E_{q_j}^1 + F_{q_j}^1 \right) \right] / D^2 \otimes E^2 \otimes F^2.$$

Allora L ha la dimensione aspettata.

3.2 Non difettività delle varietà cubiche

A questo punto abbiamo gli strumenti che ci permettono di dimostrare che una varietà di Segre cubica, diversa dalla varietà $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, non ha secanti difettive.

Teorema 3.7 ([Li1], Teorema 4.4). *Siano U, V, W spazi vettoriali di dimensione $n + 1$, con $n \neq 2$, sia $X = \mathbb{P}U \times \mathbb{P}V \times \mathbb{P}W$. Allora, per ogni $s \in \mathbb{N}$, $\sigma_s(X)$ è non difettiva.*

Dimostrazione. Per $n = 1$ e $n = 3$ si verifica con il calcolo esplicito che non ci sono secanti difettive.

Consideriamo dunque $n \geq 4$ e consideriamo $U = D^1 \oplus D^2$, $V = E^1 \oplus E^2$, $W = F^1 \oplus F^2$ della forma seguente: se $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, $\dim D^1 = \dim E^1 = 2$, $\dim F^1 = 0$; se invece $n \equiv 0 \pmod{3}$, $\dim D^1 = \dim E^1 = 1$, $\dim F^1 = 2$. Per l'Osservazione 2.5, è sufficiente dimostrare che $\sigma_s(X)$ è non difettiva per $s = \left\lfloor \frac{(n+1)^3}{3n+1} \right\rfloor$ e per $s = \left\lceil \frac{(n+1)^3}{3n+1} \right\rceil$. Sia s' definito come segue:

$$s' = \begin{cases} \frac{(n-1)(n+1)}{3}, & n \not\equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{(n^2)}{3}, & n \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

e sia $s'' = s - s'$. Consideriamo s punti generali di X , $p_1, \dots, p_{s'}, q_1, \dots, q_{s''}$, tali che $p_j \in Y$, dove $Y = \mathbb{P}D^2 \times \mathbb{P}E^2 \times \mathbb{P}F^2$, per ogni $j = 1, \dots, s'$.

Con questa scelta, indicando con L lo spazio tangente a $\sigma_s(X)$, vale l'eguaglianza seguente:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{s'} T_{p_j} X + \sum_{i=1}^{s''} T_{q_i} X &= \\ &= \sum_{j=1}^{s'} T_{p_j} Y + \left[\sum_{i=1}^{s''} T_{q_i} X + \sum_{j=1}^{s'} \left(D_{p_j}^1 + E_{p_j}^1 + F_{p_j}^1 \right) \right]. \end{aligned}$$

In particolare esiste un epimorfismo da L sullo spazio \bar{L} , definito da:

$$\bar{L} = \sum_{j=1}^{s'} T_{p_j} Y \oplus \left[\sum_{i=1}^{s''} T_{q_i} X + \sum_{j=1}^{s'} (D_{p_j}^1 + E_{p_j}^1 + F_{p_j}^1) \right] / (D^2 \otimes E^2 \otimes F^2),$$

in cui il primo addendo diretto è un sottospazio di $D^2 \otimes E^2 \otimes F^2$. Per il Teorema 3.3, si ha che il primo addendo diretto ha la dimensione attesa e coincide con $D^2 \otimes E^2 \otimes F^2$. Inoltre il Lemma 3.5 e il Lemma 3.6 garantiscono che il secondo addendo diretto abbia la dimensione attesa rispettivamente nel caso $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ e $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Con questo si ha la tesi, in quanto la scrittura in somma diretta garantisce che L ha almeno la somma delle dimensioni degli addendi diretti di \bar{L} . \square

Come corollario del Teorema 3.7, possiamo dare un risultato sul rango di una varietà di Segre cubica:

Corollario 3.8. *Sia $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, con $n \neq 2$. Allora vale:*

$$\underline{\mathbf{R}}(X) = \left\lceil \frac{(n+1)^3}{1+3n} \right\rceil.$$

Dimostrazione. Sia $r = \left\lceil \frac{(n+1)^3}{1+3n} \right\rceil$. La non difettività della r -secante di X garantisce che $\sigma_r(X)$ satura lo spazio e perciò $\underline{\mathbf{R}}(X) = r$. \square

Capitolo 4

Room e regione di sicurezza

In questo capitolo introdurremo le nozioni di *room* e di regione di sicurezza. Dimostreremo un risultato notevole che permette di controllare la divisione della *room* in una riduzione. Inoltre si fornirà una stima inferiore della regione di sicurezza nei casi subabbondanti.

Iniziamo dunque introducendo il concetto di *room*, un parametro associato ad ogni affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$, che dà una sorta di misura dell'abbondanza dell'affermazione.

Definizione 4.1. Siano $n_1, \dots, n_k, s, a_1, \dots, a_k$ interi positivi. Si dice *room* di $(n_1, \dots, n_k; s; a_1, \dots, a_k)$ il valore definito da:

$$\mathcal{R} = \prod_{i=1}^k (n_i + 1) - s \left[1 + \sum_{i=1}^k n_i \right] + \sum_{i=1}^k a_i (n_i + 1).$$

Spesso ci sarà utile considerare la seguente formulazione della *room*, a cui ci riferiremo con l'espressione *scrittura con il k -esimo termine in evidenza*:

$$\mathcal{R} = (n_k + 1) \left[\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - s - a_k \right] - s \left[\sum_{i=1}^{k-1} n_i \right] - \sum_{i=1}^{k-1} a_i (n_i + 1).$$

L'utilità di tale scrittura risulterà evidente in seguito. Per il momento ci limitiamo ad osservare che in una riduzione sul k -esimo fattore i valori $(n_k + 1)$, s e a_i (per ogni $i = 1, \dots, k$) cambiano, mentre $\left[\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - s - a_k \right]$, $\left[\sum_{i=1}^{k-1} n_i \right]$ e $(n_i + 1)$ (per $i = 1, \dots, k - 1$) restano invariati. Talvolta indicheremo con ρ il valore $\left[\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - s - a_k \right]$.

È evidente che, se la *room* è positiva, $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è subabbondante; se invece è negativa, allora $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è superabbondante. È facile verificare che vale il seguente teorema:

Teorema 4.2. Sia $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ un'affermazione di *room* \mathcal{R} . Siano $T(\mathbf{n}', s', \mathbf{a}')$ e $T(\mathbf{n}'', s'', \mathbf{a}'')$ due affermazioni in cui può essere ridotta $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ (secondo le no-

tazioni della Definizione 2.10) e siano rispettivamente \mathcal{R}' e \mathcal{R}'' le loro room. Allora:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}' + \mathcal{R}''.$$

Dimostrazione. La tesi si ottiene immediatamente dalle relazioni tra i termini che compaiono nelle tre affermazioni, considerando le tre room scritte con il k -esimo termine in evidenza. Infatti per le relazioni aritmetiche che valgono tra i termini di una riduzione si ha:

$$\begin{aligned} n_k + 1 &= (n'_k + 1) + (n''_k + 1) \\ s &= s' + s'' \\ a_i &= a'_i + a''_i \quad \text{per } i = 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

È quindi immediato ottenere $\mathcal{R} = \mathcal{R}' + \mathcal{R}''$. □

Possiamo riformulare l'Osservazione 2.5 come segue: date due affermazioni $T(\mathbf{n}', s', \mathbf{a}')$ e $T(\mathbf{n}'', s'', \mathbf{a}'')$ della stessa abbondanza, tali che $(s', \mathbf{a}') \leq (s'', \mathbf{a}'')$, se quella con room più alta in valore assoluto determina un caso difettivo, allora anche l'altra è difettiva. Viceversa se quella con room più bassa in valore assoluto è valida, allora anche l'altra è valida.

Data una varietà di Segre $X = \mathbb{P}^{n_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}^{n_k}$ si può osservare facilmente che le possibili $k+1$ -uple $(s; a_1, \dots, a_k)$ per cui $T(n_1, \dots, n_k; s; a_1, \dots, a_k)$ è falsa sono in numero finito. Infatti possiamo osservare quanto segue:

- i casi subabbondanti sono in numero finito, e perciò, in particolare, i casi subabbondanti falsi sono in numero finito.
- la dimensione dello spazio L considerato nella definizione 2.1 è almeno $s + \sum a_i$ in quanto i punti che consideriamo sono in posizione generale e perciò per valori sufficientemente grandi, questo satura l'ambiente.

Per questo la seguente definizione è ben posta:

Definizione 4.3. Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k}$ e indichiamo con \mathcal{T}_+ e \mathcal{T}_- due affermazioni, la prima subabbondante e la seconda superabbondante, difettive e che abbiano room massima in valore assoluto tra tutti i casi difettivi di X . Poste \mathcal{R}_+ e \mathcal{R}_- le loro room, siano $\mathcal{O}_+ = \mathcal{R}_+ + 1$ e $\mathcal{O}_- = \mathcal{R}_- - 1$. Diremo che una $k+1$ -upla (s, \mathbf{a}) , di room \mathcal{R} , è sicura se $\mathcal{R} \notin (\mathcal{O}_-, \mathcal{O}_+)$. Inoltre diremo che l'insieme $(-\infty, \mathcal{O}_-] \cup [\mathcal{O}_+, +\infty)$ è la regione di sicurezza per X e che \mathcal{O}_- e \mathcal{O}_+ sono gli estremi della regione di sicurezza.

Da questa definizione si ha immediatamente la seguente proposizione:

Proposizione 4.4. Sia $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ un'affermazione sicura. Allora $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è vera.

In generale, come mostrato nell'esempio seguente, date due affermazioni sicure, l'affermazione che esse compongono, seppur vera, non è necessariamente sicura. Tuttavia, se un'affermazione ha room abbastanza alta da poter essere ridotta in due affermazioni sicure, si può essere certi che tale affermazione sia vera.

Esempio 4.5. Consideriamo le varietà di Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^3$ e $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$. Si può dimostrare con il calcolo esplicito (cfr. Capitolo 7) che l'estremo di sicurezza negativo della prima varietà è -15 , mentre quello della seconda varietà è -5 . L'affermazione $T(1, 5, 3; 4; 3, 0, 4)$ ha room -14 e dunque non è sicura. Questa affermazione si riduce sul secondo fattore in $T(1, 2, 3; 3; 1, 1, 1)$ e $T(1, 2, 3; 1; 2, 0, 3)$, che hanno rispettivamente room -6 e -8 e sono quindi sicure.

L'obiettivo di questo capitolo sarà fornire dei risultati che permettano di controllare come viene divisa la room in una riduzione. In particolare si cercheranno delle condizioni che permettano di massimizzare (in valore assoluto) le room delle affermazioni \mathcal{T}' e \mathcal{T}'' , risultato della riduzione di un'affermazione \mathcal{T} .

4.1 Ricerca di una riduzione proporzionata

Diremo che una riduzione è centrale se le due affermazioni \mathcal{T}' e \mathcal{T}'' si riferiscono alla medesima varietà di Segre, ovvero, equivalentemente, $n'_k + 1$ e $n''_k + 1$ sono uguali.

In una riduzione sul k -esimo fattore di un'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$, possiamo considerare il rapporto tra l'intero $n'_k + 1$ (o in modo simmetrico $n''_k + 1$) e il valore $n_k + 1$. Questo rapporto è sempre più piccolo di 1 e, intuitivamente, dà una misura di quanto la riduzione è vicina ad essere centrale. Dagli esempi che si possono costruire e dai calcoli che è possibile fare con un calcolatore, sembrerebbe che una buona strategia per trovare riduzioni ottimali, è cercare di dividere la room con una proporzione vicina a quella della divisione dell'intero $n_k + 1$. Il risultato seguente dimostra che, sotto opportune ipotesi, esiste una riduzione tale che la differenza tra la sua room e quella ottimale è controllata da un termine che dipende solo dalla varietà di Segre.

Teorema 4.6. *Sia $k \geq 3$ e siano $n_1, \dots, n_k, s, a_1, \dots, a_k$ numeri naturali e sia $\mathcal{T} = T(n_1, \dots, n_k; s; a_1, \dots, a_k)$. Sia \mathcal{R} la room di \mathcal{T} . Siano n'_k, n''_k tali che $(n'_k + 1) + (n''_k + 1) = n_k + 1$ e siano $\gamma' = \frac{n'_k + 1}{n_k + 1}$, $\gamma'' = \frac{n''_k + 1}{n_k + 1}$. Allora esiste una riduzione sul k -esimo fattore di \mathcal{T} in due affermazioni $\mathcal{T}' = T(n_1, \dots, n_{k-1}, n'_k; s'; a'_1, \dots, a'_k)$ e $\mathcal{T}'' = T(n_1, \dots, n_{k-1}, n''_k; s''; a''_1, \dots, a''_k)$, di room \mathcal{R}' e \mathcal{R}'' tali che:*

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}' - \gamma' \mathcal{R}| &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} n_i, \\ |\mathcal{R}'' - \gamma'' \mathcal{R}| &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} n_i. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Se inoltre vale:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} n_i \leq \min\{\gamma', \gamma''\} |\mathcal{R}|, \tag{4.2}$$

allora tale riduzione è ammissibile (v. Definizione 2.10).

Dimostrazione. Supponiamo di fissare i valori a'_1, \dots, a'_{k-1} (e di conseguenza a''_1, \dots, a''_{k-1}) e denotiamo con \underline{a}' il vettore (a'_1, \dots, a'_{k-1}) . Senza perdita di generalità, possiamo supporre $n_i \leq n_{i+1}$ per $i = 1, \dots, k-2$.

Il caso in cui, s e tutti gli a_i sono nulli eccetto a_k si tratta facilmente. Infatti in questa situazione la sola scelta di n'_k (e perciò di n''_k) determina l'intera riduzione, che sarà necessariamente data dalle affermazioni:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}' &= T(n_1, \dots, n_{k-1}, n'_k; 0; 0, \dots, 0, a_k), \\ \mathcal{T}'' &= T(n_1, \dots, n_{k-1}, n''_k; 0; 0, \dots, 0, a_k).\end{aligned}$$

che hanno room esattamente $\gamma'\mathcal{R}$ e $\gamma''\mathcal{R}$, rispettivamente.

Dunque possiamo supporre che almeno uno tra s e gli a_i con $i \neq k$ sia non nullo. Cominciamo trattando il caso $s \geq 1$. In questo caso, per ogni s' da 0 a s , viene individuata un'affermazione $T(n_1, \dots, n_{k-1}, n'_k; s'; \underline{a}', a_k + s - s')$ che può intervenire in una riduzione di \mathcal{T} . Indicheremo con $\mathcal{R}_{s'}^{\underline{a}'}$ (per $s' = 0, \dots, s$) la room di ciascuna di queste affermazioni. Si osserva facilmente che

$$\mathcal{R}_{s'}^{\underline{a}'} - \mathcal{R}_{s'+1}^{\underline{a}'} = \sum_{i=1}^{k-1} n_i. \quad (4.3)$$

In particolare ad ogni vettore \underline{a}' corrisponde una sequenza di $s+1$ affermazioni e dunque una sequenza di $s+1$ room $\mathcal{R}_0^{\underline{a}'}, \dots, \mathcal{R}_s^{\underline{a}'}$.

Dimostreremo che esiste un \underline{a}' per cui la corrispondente sequenza delle room attraversa il valore $\gamma'\mathcal{R}$, cioè per cui vale:

$$\mathcal{R}_0^{\underline{a}'} \geq \gamma'\mathcal{R} \geq \mathcal{R}_s^{\underline{a}'}. \quad (4.4)$$

Tutti i possibili \underline{a}' rientrano in uno dei seguenti tre gruppi:

- quelli per cui $\mathcal{R}_s^{\underline{a}'} > \gamma'\mathcal{R}$, e quindi $\mathcal{R}_{s'}^{\underline{a}'} > \gamma'\mathcal{R}$ per ogni s' ;
- quelli per cui $\mathcal{R}_0^{\underline{a}'} < \gamma'\mathcal{R}$, e quindi $\mathcal{R}_{s'}^{\underline{a}'} < \gamma'\mathcal{R}$ per ogni s' ;
- quelli per cui vale (4.4).

Dimostreremo che il terzo gruppo non è vuoto. Innanzitutto osserviamo che, se il terzo gruppo fosse vuoto, allora necessariamente non lo sarebbero gli altri due. Una volta dimostrato questo si arriverà rapidamente a un assurdo. Con il simbolo ρ indichiamo il valore $\left[\prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - s - a_k \right]$. Si può verificare che:

$$\mathcal{R}_0^{\underline{0}} = (n'_k + 1)\rho > (n'_k + 1)\rho - \gamma' \left[s \sum_{i=1}^{k-1} n_i + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(n_i + 1) \right] = \gamma'\mathcal{R},$$

dunque $\underline{a}' = \underline{0}$ sta nel primo o nel terzo gruppo. Poiché supponiamo che il terzo sia vuoto, allora necessariamente $\underline{0}$ è nel primo.

Analogamente, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_s^a &= (n'_k + 1)\rho - \left[s \sum_{i=1}^{k-1} n_i + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(n_i + 1) \right] < \\ &< (n'_k + 1)\rho - \gamma' \left[s \sum_{i=1}^{k-1} n_i + \sum_{i=1}^{k-1} a_i(n_i + 1) \right] = \gamma' \mathcal{R}, \end{aligned}$$

e perciò $\underline{a}' = \underline{a}$ è nel secondo o nel terzo gruppo. Se supponiamo che il terzo sia vuoto è necessariamente nel secondo.

Dunque il primo e il secondo gruppo non sono vuoti. Consideriamo un $\tilde{\underline{a}}'$ del secondo gruppo che sia minimale, cioè tale che $\tilde{\underline{a}}' - \epsilon$ sia nel primo gruppo, per ogni $\epsilon \in \mathbb{N}^{k-1}$ non nullo tale che $\tilde{\underline{a}}' - \epsilon \geq \underline{0}$.

Sia \bar{j} un qualsiasi valore j per cui $\tilde{a}'_j \neq 0$ e sia $\tilde{\epsilon} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ in cui 1 è al posto \bar{j} -esimo. Per la minimalità di $\tilde{\underline{a}}'$, si ha che $\tilde{\underline{a}}' - \tilde{\epsilon}$ è nel primo gruppo. In particolare si ha quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0^{\tilde{\underline{a}}'} &< \gamma' \mathcal{R} \\ \mathcal{R}_s^{\tilde{\underline{a}}' - \tilde{\epsilon}} &> \gamma' \mathcal{R} \end{aligned}$$

Si ottengono quindi le diseguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0^{\tilde{\underline{a}}'} &= (n'_k + 1)\rho - \sum_{i=\bar{j}}^{k-1} \tilde{a}'_i(n_i + 1) < \gamma' \mathcal{R}, \\ \mathcal{R}_s^{\tilde{\underline{a}}' - \tilde{\epsilon}} &= (n'_k + 1)\rho - s \sum_{i=1}^{k-1} n_i - \sum_{i=\bar{j}}^{k-1} \tilde{a}'_i(n_i + 1) + (n_{\bar{j}} + 1) > \gamma' \mathcal{R}. \end{aligned}$$

E perciò, per differenza, si ottiene la diseguaglianza:

$$s \sum_{i=1}^{k-1} n_i - (n_{\bar{j}} + 1) < 0,$$

che può essere verificata solo se $s = 0$.

Poiché si è supposto che $s \geq 1$, si ottiene una contraddizione, e da questo si deduce che l'insieme degli \underline{a}' per cui vale (4.4) non è vuoto. Consideriamo quindi un \underline{a}' per cui vale (4.4).

Per la (4.3), è immediato che esiste un $s' \in \{0, \dots, s\}$ per cui vale:

$$\left| \mathcal{R}_{s'}^{\underline{a}'} - \gamma' \mathcal{R} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} n_i.$$

Poniamo $\underline{a}'' = \underline{a} - \underline{a}'$ e $s'' = s - s'$, e consideriamo la riduzione definita da questi valori, indicando con \mathcal{R}' e \mathcal{R}'' le room delle due affermazioni. Ovviamente $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{s'}^{\underline{a}'}$, e per l'additività della room si ha $\mathcal{R}'' = \mathcal{R} - \mathcal{R}_{s'}^{\underline{a}'}$ e quindi, poiché chiaramente $\gamma' + \gamma'' = 1$ vale anche che:

$$|\mathcal{R}'' - \gamma'' \mathcal{R}| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} n_i.$$

Perciò le affermazioni \mathcal{T}' e \mathcal{T}'' definite rispettivamente da \underline{a}' e s' e da \underline{a}'' e s'' hanno room \mathcal{R}' e \mathcal{R}'' che soddisfano (4.1).

La situazione è leggermente diversa se $s = 0$. In questo caso dimostreremo che è sempre possibile determinare una riduzione in due affermazioni con room \mathcal{R}' e \mathcal{R}'' tali che:

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}' - \gamma' \mathcal{R}| &\leq \frac{1}{2}(n_{k-1} + 1), \\ |\mathcal{R}'' - \gamma'' \mathcal{R}| &\leq \frac{1}{2}(n_{k-1} + 1). \end{aligned} \tag{4.5}$$

e in particolare per questa riduzione vale la (4.1), dal momento che stiamo trattando casi con almeno tre fattori.

Per quello che si è osservato all'inizio della dimostrazione, possiamo supporre $a_i \neq 0$ per un qualche $i \neq k$: consideriamo d il massimo indice in $\{1, \dots, k-1\}$ per cui $a_d \neq 0$. Dunque l'affermazione che vogliamo ridurre ha la forma seguente:

$$T(n_1, \dots, n_k; 0; a_1, \dots, a_d, 0, \dots, 0, a_k).$$

Con un procedimento analogo a quello seguito in precedenza, fissiamo a'_1, \dots, a'_{d-1} e consideriamo la sequenza delle room delle affermazioni definite facendo variare a'_d in $\{0, \dots, a_d\}$. Indichiamo con \underline{a}' il vettore (a'_1, \dots, a'_{d-1}) e con $\mathcal{R}_{a'_d}^{\underline{a}'}$ la room dell'affermazione definita da $(a'_1, \dots, a'_{d-1}, a'_d, 0, \dots, 0, a_k)$.

Come prima, possiamo dividere in tre gruppi le possibili scelte di \underline{a}' e procedendo in modo del tutto analogo, si arriva a una disequaglianza assurda della forma:

$$a_d(n_d + 1) - (n_{\bar{j}} + 1) < 0.$$

Questa disequaglianza non può valere in quanto $a_d \geq 1$ e, poiché abbiamo supposto gli n_i disposti in ordine crescente, $n_{\bar{j}} \leq n_d$. Si è quindi dimostrato che è possibile trovare un \underline{a}' tale che:

$$\mathcal{R}_0^{\underline{a}'} \geq \gamma' \mathcal{R} \geq \mathcal{R}_{a_d}^{\underline{a}'}$$

In particolare, esisterà un \underline{a}'_d tale che la riduzione determinata da \underline{a}'_d, a'_d soddisfa la (4.5) e perciò la (4.1).

Questo conclude la dimostrazione della prima parte del teorema.

Inoltre la condizione (4.2), garantisce che le due affermazioni generate nella riduzione abbiano room \mathcal{R}' e \mathcal{R}'' con lo stesso segno di \mathcal{R} , cioè la stessa abbondanza, e dunque che la riduzione sia ammissibile. \square

In generale il Teorema 4.6 sarà utilizzato soprattutto nella sua prima parte, senza curarsi in prima battuta dell'ammissibilità della riduzione. Infatti la condizione (4.2) è molto restrittiva e poco maneggevole; nei vari casi che proporremo si preferirà quindi applicare il Teorema 4.6 semplicemente per costruire la riduzione, e di volta in volta dare delle condizioni *ad hoc* che ne garantiscano l'ammissibilità.

4.2 Una stima dell'estremo di sicurezza positivo

Consideriamo una varietà di Segre $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$. Posto \mathcal{O}_+ l'estremo positivo della regione di sicurezza di X , mostreremo che $\mathcal{O}_+ \geq (\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1)n_k$. Per mostrare questo, sarà sufficiente esibire, per ogni scelta di n_1, \dots, n_k un'affermazione subabbondante falsa la cui room sia $\mathcal{R} = (\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1)n_k - 1$. Un'affermazione di questo tipo esiste sempre, come dimostrato dalla seguente:

Proposizione 4.7. *Siano n_1, \dots, n_k interi positivi. Allora l'affermazione $\mathcal{T} = T(n_1, \dots, n_k; 1; 0, \dots, 0, a_k)$ con $a_k = \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - \sum_{i=1}^{k-1} n_i$, di room \mathcal{R} , verifica $\mathcal{R} = (\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1)n_k - 1$ ed è falsa.*

Dimostrazione. È immediato verificare che $\mathcal{R} = (\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1)n_k$, perciò l'affermazione è subabbondante.

Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_k}$ e siano V_j spazi vettoriali tali che $\dim V_j = n_j + 1$ e $\mathbb{P}^{n_j} = \mathbb{P}V_j$. Procediamo per assurdo supponendo che \mathcal{T} sia vera. Consideriamo $p, q_1, \dots, q_{a_k} \in X$, $1 + a_k$ punti in posizione generale, della forma seguente:

$$p = v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \quad q_j = w_1^j \otimes \cdots \otimes w_k^j \quad (\text{per } j = 1, \dots, a_k).$$

Per alleggerire la notazione, ometteremo il segno di tensore \otimes . Se \mathcal{T} è vera, allora, posto $L = T_p X + \sum_{j=1}^{a_k} G_{q_j}^k X$, si ha che:

$$\dim L = \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1 \right) + a_k(n_k + 1).$$

Per come sono definiti p e i q_j si ha $T_p X = V_1 v_2 \dots v_k + \cdots + v_1 \dots v_{k-1} V_k$, e $G_{q_j}^k X = w_1^j \dots w_{k-1}^j V_k$. Chiaramente $\dim T_p X = \sum_{i=1}^k n_i + 1$, $\dim G_{q_j}^k X = n_k + 1$ e perciò $\dim \left(\sum_{j=1}^{a_k} G_{q_j}^k X \right) \leq a_k(n_k + 1)$. Si deduce quindi che condizione necessaria affinché L abbia la dimensione aspettata è che $T_p X$ e $G_{a_k}^k X$ abbiano intersezione banale.

Mostreremo che questi due spazi hanno intersezione non banale. Da ciò risulterà che \mathcal{T} è falsa. In particolare si mostrerà che hanno intersezione non banale i due spazi seguenti, rispettivamente sottospazi di $T_p X$ e di $G_{a_k}^k X$:

$$\begin{aligned} T_{\widehat{k}} &= V_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k + \dots + v_1 \dots v_{k-2} V_{k-1} v_k, \\ W v_k &= \langle w_1^j \dots w_{k-1}^j v_k \mid j = 1, \dots, a_k \rangle. \end{aligned}$$

Poiché i punti q_j sono in posizione generale, si ha che $\dim W v_k = a_k$. Inoltre $\dim T_{\widehat{k}} = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i$. Essendo due sottospazi di $V_1 \dots V_{k-1} v_k$ si ha, per la Formula di Grassmann, che:

$$\begin{aligned} \dim[W v_k \cap T_{\widehat{k}}] &\geq \dim(W v_k) + \dim(T_{\widehat{k}}) - \dim(V_1 \dots V_{k-1} v_k) = \\ &= a_k + 1 + \sum_{i=1}^{k-1} n_i - \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) = 1. \end{aligned}$$

Questi spazi non sono quindi indipendenti, e perciò L non può avere la dimensione aspettata. Si conclude che \mathcal{T} è falsa. \square

Corollario 4.8. *Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k}$ una varietà di Segre e sia \mathcal{O}_+ l'estremo positivo della sua regione di sicurezza. Allora $\mathcal{O}_+ \geq \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1 \right) n_k$.*

Dimostrazione. Si ottiene banalmente dalla Proposizione 4.7 in quanto l'affermazione $T(n_1, \dots, n_k; 1; 0, \dots, 0, a_k)$ con $a_k = \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - \sum_{i=1}^{k-1} n_i$ è falsa e ha room $\mathcal{R} = \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1 \right) n_k - 1$. \square

Con il calcolo esplicito, si può osservare che l'estremo di sicurezza positivo è esattamente $\left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1 \right) n_k$ nel caso di varietà di Segre con tre fattori di dimensione n_1, n_2, n_3 con $n_i \leq 5$ e con quattro fattori di dimensione n_1, n_2, n_3, n_4 con $n_i \leq 3$. In particolare i risultati ottenuti nel Capitolo 7 grazie al software Macaulay2 (cfr. Appendice B) suggeriscono la Congettura 7.1.

Nel capitolo seguente si osserverà che applicando ricorsivamente il Teorema 4.6, è possibile controllare come varia la room anche in una sequenza di molte riduzioni. Questo ci permetterà, in alcuni casi particolari, di dare una stima degli estremi di sicurezza di una varietà di Segre in funzione di quelli di un'altra varietà, di dimensione più bassa.

Capitolo 5

Riduzioni con room controllata

Nei paragrafi seguenti osserveremo che il Teorema 4.6 può essere utilizzato ricorsivamente in alcuni casi particolari per dare una stima della regione di sicurezza di varietà di Segre di dimensione alta, conoscendo gli estremi di sicurezza di varietà di Segre di dimensione più bassa.

Spesso ci sarà utile il seguente risultato, di immediata dimostrazione:

Teorema 5.1. *Sia $\mathcal{T} = T(n_1, \dots, n_k; s; a_1, \dots, a_k)$ un'affermazione di room \mathcal{R} . Sia \mathfrak{A} un albero di riduzione per \mathcal{T} e siano $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ le affermazioni corrispondenti alle foglie. Allora sono equivalenti:*

- le riduzioni di \mathfrak{A} sono tutte ammissibili secondo la Definizione 2.10;
- $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_r$ hanno la stessa abbondanza.

Dimostrazione. Evidentemente se tutte le riduzioni sono ammissibili, su tutto l'albero compaiono affermazioni che hanno la stessa abbondanza di \mathcal{T} ; in particolare tutte le foglie hanno la stessa abbondanza di \mathcal{T} .

Viceversa, se tutte le foglie hanno la stessa abbondanza, per l'additività della room, risalendo l'albero si incontrano affermazioni che hanno la stessa abbondanza, e dunque tutte le riduzioni sono ammissibili. \square

Grazie a questo risultato potremo dedurre che tutte le riduzioni di un albero sono ammissibili, semplicemente dimostrando che le affermazioni corrispondenti alle foglie dell'albero hanno tutte la stessa abbondanza. Questo sarà particolarmente utile in questo capitolo, in cui spesso saranno verificate delle condizioni che danno un controllo sulla room delle affermazioni ottenute al termine di una serie di riduzioni, senza dare a priori nessuna informazione sull'ammissibilità delle riduzioni considerate.

In seguito si studieranno tre casi in cui è possibile costruire alberi di riduzione per cui valgano delle condizioni che controllano la room delle diverse affermazioni che compaiono nell'albero. Sfrutteremo il Teorema 5.1, per costruire gli alberi senza preoccuparci dell'ammissibilità delle riduzioni; solo al termine del processo verranno valutate condizioni che garantiscono che le foglie dell'albero corrispondano

ad affermazioni con la stessa abbondanza, e dunque che tutte le riduzioni siano ammissibili.

5.1 Il caso cubico

Sia X una varietà di Segre della forma $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ e supponiamo che $n + 1$ sia pari. Consideriamo un'affermazione $\mathcal{T} = T(n, n, n; s; a_1, a_2, a_3)$, di room \mathcal{R} .

Con tre riduzioni centrali consecutive è possibile ridurre \mathcal{T} in otto affermazioni della forma $\mathcal{T}_1 = T(n_1, n_1, n_1; s^{(1)}; a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)})$ (di room \mathcal{R}_1), in cui $n_1 + 1 = \frac{n+1}{2}$. Si daranno dei risultati che ci permettono di controllare il valore $|\mathcal{R}_1 - \frac{1}{8}\mathcal{R}|$.

Lemma 5.2. *Sia $\mathcal{T} = T(n, n, n; s; a_1, a_2, a_3)$ un'affermazione di room \mathcal{R} , con $n + 1$ pari. Allora è possibile determinare tre riduzioni consecutive che diano luogo a 8 affermazioni \mathcal{T}_1 , di room indicata genericamente con \mathcal{R}_1 per cui vale:*

$$\left| \mathcal{R}_1 - \frac{1}{8}\mathcal{R} \right| \leq \frac{9}{8}n. \quad (5.1)$$

Dimostrazione. Applicheremo tre riduzioni centrali, con $n' + 1 = n'' + 1 = \frac{n+1}{2}$, quindi con $\gamma' = \gamma'' = \frac{1}{2}$, prima sul primo fattore, poi sul secondo e infine sul terzo. Per il Teorema 4.6, da \mathcal{T} possiamo ottenere due affermazioni relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, dove $n_1 + 1 = \frac{n+1}{2}$ le cui room, che indichiamo con \mathcal{R}^* soddisfano:

$$\left| \mathcal{R}^* - \frac{1}{2}\mathcal{R} \right| \leq n.$$

Con una seconda riduzione centrale, questa volta sul secondo fattore delle affermazioni ottenute, si ottengono quattro affermazioni relative alla varietà $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^n$, per cui, posta \mathcal{R}^{**} la room di una qualsiasi delle quattro affermazioni, vale:

$$\left| \mathcal{R}^{**} - \frac{1}{4}\mathcal{R} \right| \leq \frac{5}{4}n - \frac{1}{4}.$$

ottenuta ancora da (4.1).

Infine, con un riduzione centrale sul terzo fattore, si ottengono otto affermazioni relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1}$, le cui room, che indichiamo con \mathcal{R}_1 , soddisfano la condizione seguente:

$$\left| \mathcal{R}_1 - \frac{1}{8}\mathcal{R} \right| \leq \frac{9}{8}n - \frac{5}{8} \leq \frac{9}{8}n$$

Si ha quindi la tesi. □

Dunque dopo tre riduzioni centrali otteniamo otto affermazioni le cui room soddisfano la condizione (5.1). Consideriamo ora un'affermazione $T(n, n, n; s; a_1, a_2, a_3)$ in cui n soddisfa una condizione della forma $n + 1 = 2^d c$, per certi interi d, c . Possiamo applicare d volte una sequenza di tre riduzioni centrali fino ad ottenere da

\mathcal{T} una serie di 8^d affermazioni relative a $\mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$. Il risultato seguente descrive come può essere divisa la room di \mathcal{T} tra le 8^d affermazioni in questione.

Proposizione 5.3. *Sia $\mathcal{T} = T(n, n, n; s; a_1, a_2, a_3)$ un'affermazione con room \mathcal{R} , dove $n = 2^d c - 1$ per certi interi c, d . Allora è possibile determinare d sequenze di tre riduzioni centrali che diano luogo a 8^d affermazioni (la cui room è indicata genericamente con \mathcal{R}_d) relative a $\mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$ per cui vale:*

$$\left| \mathcal{R}_d - \frac{1}{8^d} \mathcal{R} \right| \leq 3c. \quad (5.2)$$

Dimostrazione. Per il Lemma 5.2 è possibile determinare una sequenza di tre riduzioni che determina 8 affermazioni \mathcal{T}_1 , le cui room \mathcal{R}_1 soddisfano la (5.1). In questo caso si ottiene che le 8 affermazioni \mathcal{T}_1 sono della stessa forma di \mathcal{T} e dunque il procedimento può essere iterato. Indichiamo con \mathcal{T}_k le affermazioni ottenute dopo k sequenze di tre riduzioni e con \mathcal{R}_k le loro room. In particolare, considerando una generica affermazioni \mathcal{T}_k ottenuta dalla riduzione di una \mathcal{T}_{k-1} , vale:

$$\left| \mathcal{R}_k - \frac{1}{8} \mathcal{R}_{k-1} \right| \leq \frac{9}{8} n_{k-1}. \quad (5.3)$$

Procedendo per induzione su k dimostriamo che:

$$\left| \mathcal{R}_k - \frac{1}{8^k} \mathcal{R} \right| \leq 9 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{n_i}{8^{k-i}} \right), \quad (5.4)$$

dove $n = n_0$.

Per $k = 1$, la diseguaglianza vale per la (5.1). Consideriamo ora solo una delle due diseguaglianze definite dal valore assoluto. Da (5.3) e sfruttando l'ipotesi induttiva, otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k &\leq \frac{1}{8} \mathcal{R}_{k-1} + \frac{9}{8} n_{k-1} \leq \\ &\leq \frac{1}{8} \left[\frac{1}{8^{k-1}} \mathcal{R} + 9 \left(\sum_{i=0}^{k-2} \frac{n_i}{8^{k-1-i}} \right) \right] + \frac{9}{8} n_{k-1} = \\ &= \frac{1}{8^k} \mathcal{R} + \frac{9}{8} \left(\sum_{i=0}^{k-2} \frac{n_i}{8^{k-1-i}} \right) + \frac{9}{8} n_{k-1} = \\ &= \frac{1}{8^k} \mathcal{R} + 9 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{n_i}{8^{k-1-i}} \right) \end{aligned}$$

In modo analogo si ottiene anche la diseguaglianza $\mathcal{R}_k \geq \frac{1}{8^k} \mathcal{R} - 9 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{n_i}{8^{k-1-i}} \right)$ e perciò vale la (5.4). Stimiamo in particolare il valore $\sum_{i=0}^{k-1} \frac{n_i}{8^{k-1-i}}$ per $k = d$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{d-1} \frac{n_i}{8^{d-i}} &= \sum_{i=0}^{d-1} \frac{n_i}{8^{d-i}} + \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{8^{d-i}} - \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{8^{d-i}} = \\
 &= \sum_{i=0}^{d-1} \frac{n_i + 1}{8^{d-i}} - \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{8^{d-i}} \leq \sum_{i=0}^{d-1} \frac{2^{d-i} c}{8^{d-i}} = \\
 &= c \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{4^{d-i}} = \frac{c}{4} \sum_{i=0}^{d-1} \frac{1}{4^i} \leq \frac{c}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{c}{3}.
 \end{aligned}$$

Dunque si ha:

$$\left| \mathcal{R}_d - \frac{1}{8^d} \mathcal{R} \right| \leq 9 \left(\sum_{i=0}^{d-1} \frac{n_i}{8^{d-i}} \right) \leq 9 \left(\frac{c}{3} \right) = 3c.$$

Questo conclude la dimostrazione. \square

Questi risultati ci permettono di dare una stima degli estremi della regione di sicurezza di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ conoscendo gli estremi della regione di sicurezza di $\mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$. In particolare vale:

Proposizione 5.4. *Sia $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ una varietà di Segre con $n = 2^d c - 1$ per qualche valore intero d, c e sia $Y = \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$. Siano $\mathcal{O}_-, \mathcal{O}_+$ gli estremi della regione di sicurezza di Y e $\mathcal{O}_-, \mathcal{O}_+$ quelli della regione di sicurezza di X . Allora vale:*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_+^* &\leq 8^d (\mathcal{O}_+ + 3c), \\
 \mathcal{O}_-^* &\geq 8^d (\mathcal{O}_- - 3c).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Dimostrazione. Consideriamo un'affermazione $\mathcal{T} = T(n, n, n; s; a_1, a_2, a_3)$, di room $\mathcal{R} \geq 8^d (\mathcal{O}_+ + 3c)$. Mostriamo che tale affermazioni è vera. Per la Proposizione 5.3, esiste un albero di riduzione per \mathcal{T} le cui le foglie corrispondono ad affermazioni $\mathcal{T}_d = T(c-1, c-1, c-1; s^*; a_1^*, a_2^*, a_3^*)$ di room \mathcal{R}_d per cui vale (5.2). In particolare si ha:

$$\mathcal{R}_d \geq \frac{1}{8^d} \mathcal{R} - 3c \geq \frac{1}{8^d} \left[8^d (\mathcal{O}_+ + 3c) \right] = \mathcal{O}_+.$$

Dunque le affermazioni \mathcal{T}_d hanno room nella regione di sicurezza di Y , e perciò sono vere. Inoltre hanno tutte la stessa abbondanza, in quanto $\mathcal{O}_+ \geq 0$ e dunque per il Teorema 5.1 tutte le affermazioni dell'albero sono ammissibili. Perciò per il Teorema 2.7 anche \mathcal{T} è vera e quindi $\mathcal{O}_+^* \leq 8^d (\mathcal{O}_+ + 3c)$.

Analogamente, considerando un'affermazione superabbondante, si dimostra che $\mathcal{O}_-^* \geq 8^d (\mathcal{O}_- - 3c)$. \square

5.2 Un altro caso particolare

Con la stessa tecnica adottata nel caso precedente possiamo studiare un altro caso particolare. Consideriamo la varietà $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3}$, con n_1, n_2, n_3 che soddisfano una condizione della forma:

$$n_j + 1 = 2^{d_j} c, \quad j = 1, 2, 3, \quad (5.6)$$

con $d_1 \leq d_2 \leq d_3$.

Data un'affermazione $\mathcal{T} = T(n_1, n_2, n_3; s; a_1, a_2, a_3)$, con room \mathcal{R} , possiamo applicare $d_3 - d_2$ riduzioni consecutive sul terzo fattore fino ad ottenere affermazioni relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_2}$. A questo punto alterniamo una riduzione sul terzo fattore ad una sul secondo fino ad ottenere affermazioni relative al caso cubico $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1}$, a cui possiamo applicare il risultato ottenuto nel paragrafo precedente.

Per semplicità, divideremo il processo di riduzione in tre fasi:

1. Nella prima fase, ridurremo l'affermazione $\mathcal{T} = T(n_1, n_2, n_3; s; a_1, a_2, a_3)$, attraverso riduzioni consecutive sul terzo fattore, ad affermazioni relative alla varietà $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_2}$.
2. Nella seconda fase, ridurremo ciascuna delle affermazioni ottenute alla fine della prima fase, attraverso riduzioni alternate tra secondo e terzo fattore, ad affermazioni relative alla varietà $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1}$.
3. Nella terza fase, ridurremo ciascuna delle affermazioni del caso cubico ottenute alla fine della seconda fase, attraverso sequenze di riduzioni analoghe a quelle descritte nel paragrafo precedente, ad affermazioni relative alla varietà $\mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$.

Come nel caso precedente, si cercherà di costruire un albero di riduzione in cui sia possibile controllare la room delle affermazioni corrispondenti ai vari nodi in funzione della room dell'affermazione \mathcal{T} da ridurre.

Lemma 5.5. *Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3}$, con $n_j + 1 = 2^{d_j} c$ per certi interi c, d_1, d_2, d_3 tali che $d_1 \leq d_2 \leq d_3$. Sia $\mathcal{T} = T(n_1, n_2, n_3; s; a_1, a_2, a_3)$ un'affermazione di room \mathcal{R} . Allora è possibile determinare $d_3 - d_2$ riduzioni centrali sul terzo fattore che diano luogo a $2^{d_3 - d_2}$ affermazioni (la cui room è indicata genericamente con $\mathcal{R}_{d_3 - d_2}$) per cui vale:*

$$\left| \mathcal{R}_{d_3 - d_2} - \frac{1}{2^{d_3 - d_2}} \mathcal{R} \right| \leq (2^{d_1} + 2^{d_2})c - 1. \quad (5.7)$$

Dimostrazione. Considereremo riduzioni centrali con $\gamma' = \gamma'' = \frac{1}{2}$. Fissiamo un naturale $k \leq d_3 - d_2$. Mostriamo per induzione che vale:

$$\left| \mathcal{R}_k - \frac{1}{2^k} \mathcal{R} \right| \leq \left[\sum_{i=1}^k (2^{d_1 - i} + 2^{d_2 - i}) \right] c. \quad (5.8)$$

Per il Teorema 4.6, per ogni k vale:

$$\left| \mathcal{R}_k - \frac{1}{2} \mathcal{R}_{k-1} \right| \leq \frac{1}{2} (n_1 + n_2) \leq c \left(2^{d_1-1} + 2^{d_2-1} \right).$$

Per $k = 1$ questo dà la base dell'induzione. Consideriamo dunque un $k \geq 2$. Vale la seguente catena di disequaglianze:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k &\leq \frac{1}{2} \mathcal{R}_{k-1} + \left(2^{d_1-1} + 2^{d_2-1} \right) c \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^{k-1}} \mathcal{R} + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \left(2^{d_1-i} + 2^{d_2-i} \right) \right) c \right] + 2^{d_2-1} + \left(2^{d_1-1} + 2^{d_2-1} \right) c \leq \\ &\leq \frac{1}{2^k} \mathcal{R} + c \left[\sum_{i=1}^{k-1} \left(2^{d_2-(i+1)} + 2^{d_2-(i+1)} \right) \right] + \left(2^{d_1-1} + 2^{d_2-1} \right) c \leq \\ &\leq \frac{1}{2^k} \mathcal{R} + c \left[\sum_{i=1}^k \left(2^{d_1-i} + 2^{d_2-i} \right) \right], \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio si applica (4.1) e nel secondo passaggio si applica l'ipotesi induttiva. In modo del tutto analogo si ottiene la disequaglianza:

$$\mathcal{R}_k \geq \frac{1}{2^k} \mathcal{R} - c \left[\sum_{i=1}^k \left(2^{d_1-i} + 2^{d_2-i} \right) \right],$$

da cui si ha la (5.8).

In particolare per $k = d_3 - d_2$ vale:

$$\left| \mathcal{R}_{d_3-d_2} - \frac{1}{2^{d_3-d_2}} \mathcal{R} \right| \leq c \left[\sum_{i=1}^{d_3-d_2} \left(2^{d_1-i} + 2^{d_2-i} \right) \right],$$

È facile osservare che $\sum_{i=-\infty}^k 2^i = 2^{k+1}$ e perciò si ottiene la (5.7) \square

Dunque è possibile applicare $d_3 - d_2$ riduzioni consecutive sul terzo fattore per ottenere, al termine della prima fase di riduzione, $2^{d_3-d_2}$ affermazioni relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_2}$, le cui room, indicate genericamente con $\mathcal{R}_{d_3-d_2}$, soddisfano la condizione (5.7). Per studiare come controllare la room durante la seconda fase di riduzione, dobbiamo studiare le affermazioni della forma $T(n_1, n_2, n_2; s^*; a_1^*, a_2^*, a_3^*)$: possiamo ridurre queste affermazioni alternando una riduzione sul terzo fattore ad una sul secondo, fino a ricondurci, dopo $2(d_2 - d_1)$ riduzioni, al caso cubico.

Consideriamo in generale un'affermazione $\mathcal{T} = T(n_1, n_2, n_2; s; a_1, a_2, a_3)$, con $n_j + 1 = 2^{d_j} c$ per certi d_1, d_2, c con $d_1 \leq d_2$. Forniremo un risultato che ci permette di controllare la room delle affermazioni ottenute da \mathcal{T} dopo $2(d_2 - d_1)$ riduzioni.

Lemma 5.6. *Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_2}$, con $n_j + 1 = 2^{d_j} c$ per certi interi c, d_1, d_2 , tali che $d_1 \leq d_2$. Sia $\mathcal{T} = T(n_1, n_2, n_3; s; a_1, a_2, a_3)$ un'affermazione di room \mathcal{R} . Allora è possibile determinare $d_2 - d_1$ coppie di riduzioni centrali sul secondo e sul terzo fattore che diano luogo a $4^{d_2-d_1}$ affermazioni relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1}$ (la cui room è indicata genericamente con $\mathcal{R}_{d_2-d_1}$) per cui vale:*

$$\left| \mathcal{R}_{d_2-d_1} - \frac{1}{4^{d_2-d_1}} \mathcal{R} \right| \leq c \left[2^{d_1+1} + 2^{d_2-1} \right]. \quad (5.9)$$

Dimostrazione. Osserviamo dapprima come controllare la room delle quattro affermazioni che si ottengono dopo una coppia di riduzioni centrali, la prima sul secondo fattore e la seconda sul terzo fattore. La prima riduzione può essere determinata in modo che le due affermazioni \mathcal{T}^* a cui dà luogo, relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{\frac{n_2-1}{2}} \times \mathbb{P}^{n_2}$, soddisfino la (4.1) e quindi:

$$\left| \mathcal{R}' - \frac{1}{2} \mathcal{R} \right| \leq \left(2^{d_1-1} + 2^{d_2-1} \right) c.$$

Alle due affermazioni ottenute applichiamo una riduzione sul terzo fattore, che genera quattro affermazioni \mathcal{T}_1 , le cui room sono indicate con \mathcal{R}_1 , per le quali vale, sempre per la (4.1) e quindi:

$$\left| \mathcal{R}_1 - \frac{1}{2} \mathcal{R}' \right| \leq \frac{1}{2} \left[\left(2^{d_1} c - 1 \right) + \left(2^{d_2-1} c - 1 \right) \right]$$

Otteniamo quindi una stima del valore $|\mathcal{R}_1 - \frac{1}{4} \mathcal{R}|$ data dalle seguenti disequaglianze:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &\leq \frac{1}{2} \mathcal{R}' + \frac{1}{2} \left[\left(2^{d_1} c - 1 \right) + \left(2^{d_2-1} c - 1 \right) \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \mathcal{R} + \left(2^{d_1-1} + 2^{d_2-1} \right) c \right] + \left(2^{d_1-1} + 2^{d_2-2} \right) c = \\ &= \frac{1}{4} \mathcal{R} + \left(2^{d_1-2} + 2^{d_2-2} + 2^{d_1-1} + 2^{d_2-2} \right) c = \\ &= \frac{1}{4} \mathcal{R} + \left(2^{d_1-1} + 2^{d_1-2} + 2^{d_2-1} \right) c \end{aligned}$$

Analogamente si ottiene anche la disequaglianza:

$$\mathcal{R}_1 \geq \frac{1}{4} \mathcal{R} - c \left(2^{d_1-1} + 2^{d_1-2} + 2^{d_2-1} \right).$$

Perciò dopo una singola coppia di riduzioni si ottengono quattro affermazioni relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{\frac{n_2-1}{2}} \times \mathbb{P}^{\frac{n_2-1}{2}}$, per le quali vale la condizione:

$$\left| \mathcal{R}_1 - \frac{1}{4} \mathcal{R} \right| \leq c \left(2^{d_1-1} + 2^{d_1-2} + 2^{d_2-1} \right). \quad (5.10)$$

Indichiamo con \mathcal{T}_k le affermazioni ottenute dopo k coppie di riduzioni alternate tra secondo e terzo fattore e con \mathcal{R}_k le room di una generica di tali affermazioni.

Se consideriamo una particolare \mathcal{T}_{k-1} , di room \mathcal{R}_{k-1} e una delle affermazioni \mathcal{T}_k ottenute da questa, otteniamo, con lo stesso procedimento seguito per arrivare alla (5.10):

$$\left| \mathcal{R}_k - \frac{1}{4} \mathcal{R}_{k-1} \right| \leq c \left(2^{d_1-1} + 2^{d_1-2} + 2^{d_2-k-1} \right), \quad (5.11)$$

Dimostreremo con un argomento induttivo che, per ogni $k \leq d_2 - d_1$, vale:

$$\left| \mathcal{R}_k - \frac{1}{4^k} \mathcal{R} \right| \leq c \left[\sum_{i=1}^{2k} 2^{d_1-i} + \sum_{i=k}^{2k-1} 2^{d_2-i} \right]. \quad (5.12)$$

La base dell'induzione, per $k = 1$, è data dalla (5.10). Per $k \geq 2$ vale la seguente catena di disequaglianze:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k &\leq \frac{1}{4} \mathcal{R}_{k-1} + \left(2^{d_1-1} + 2^{d_1-2} + 2^{d_2-k-1} \right) c \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4^{k-1}} \mathcal{R} + \left(\sum_{i=1}^{2(k-1)} 2^{d_1-i} + \sum_{i=k-1}^{2(k-1)-1} 2^{d_2-i} \right) c \right] + \\ &\quad + c \left(2^{d_1-1} + 2^{d_1-2} + 2^{d_2-k-1} \right) = \\ &= \frac{1}{4^k} \mathcal{R} + \left(\sum_{i=3}^{2k} 2^{d_1-i} + \sum_{i=k+1}^{2k-1} 2^{d_2-i} \right) c + \\ &\quad + \left(2^{d_1-1} + 2^{d_1-2} + 2^{d_2-k-1} \right) c = \\ &= \frac{1}{4^k} \mathcal{R} + \left[\sum_{i=1}^{2k} 2^{d_1-i} + \sum_{i=k}^{2k-1} 2^{d_2-i} \right] c, \end{aligned}$$

dove nel primo passaggio si applica la (5.11), e nel secondo si applica l'ipotesi induttiva.

In modo del tutto analogo, possiamo dimostrare anche:

$$\mathcal{R}_k \geq \frac{1}{4^k} \mathcal{R} - c \left[\sum_{i=1}^{2k} 2^{d_1-i} + \sum_{i=k}^{2k-1} 2^{d_2-i} \right],$$

e dunque si ha la (5.12).

In particolare, per $k = d_2 - d_1$, sfruttando che $\sum_{i=-\infty}^{\ell} 2^i = 2^{\ell+1}$ e il fatto che $\sum_{i=k}^{2k-1} 2^{-i} \leq \frac{1}{2}$ si ha:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{R}_{d_2-d_1} - \frac{1}{4^{d_2-d_1}} \mathcal{R} \right| &\leq \left[\sum_{i=1}^{2(d_2-d_1)} 2^{d_1-i} + \sum_{i=d_2-d_1}^{2(d_2-d_1)-1} 2^{d_2-i} \right] c \leq \\ &\leq c \left[2^{d_1+1} + 2^{d_2-1} \right], \end{aligned}$$

e quindi la tesi. \square

Torniamo quindi a considerare un'affermazione $T(n_1, n_2, n_3; s; a_1, a_2, a_3)$, dove n_1, n_2, n_3 sono della forma indicata in (5.6). Il Lemma 5.5 ci fornisce un controllo della variazione della room al termine della prima fase di riduzione; il Lemma 5.6 ci fornisce un controllo per la seconda fase di riduzione; i risultati sul caso cubico ci forniscono un controllo per la terza fase. Raccogliendo questi risultati, possiamo fornire delle disequaglianze che controllano il valore della room di ognuna delle affermazioni relative alla varietà $\mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$ che si ottengono al termine dell'intero processo di riduzione.

Proposizione 5.7. *Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3}$ con $n_j + 1 = 2^{d_j} c$ per certi interi c, d_1, d_2, d_3 con $d_1 \leq d_2 \leq d_3$. Sia $\mathcal{T} = T(n_1, n_2, n_3; s; a_1, a_2, a_3)$ un'affermazione con room \mathcal{R} . Allora è possibile costruire un albero di riduzione per \mathcal{T} le cui foglie corrispondono ad affermazioni relative a $\mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$, con room indicata genericamente con \mathcal{R}_{fin} , per cui vale:*

$$\left| \mathcal{R}_{fin} - \frac{1}{2^{d_1+d_2+d_3}} \mathcal{R} \right| \leq \left(2^{-2d_2} + 2^{-d_1-d_2} + 2^{-2d_1+1} + 2^{d_2-3d_1-1} + 3 \right) c. \quad (5.13)$$

Dimostrazione. Per il Lemma 5.5, da \mathcal{T} possiamo ottenere $2^{d_3-d_2}$ affermazioni \mathcal{T}^* relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_2}$, di room genericamente indicata con \mathcal{R}^* , per cui vale:

$$\left| \mathcal{R}^* - \frac{1}{2^{d_3-d_2}} \mathcal{R} \right| \leq \left(2^{d_1} + 2^{d_2} \right) c.$$

Ognuna di queste $2^{d_3-d_2}$ affermazioni è della forma analizzata dal Lemma 5.6. Da ciascuna di esse si ottengono $4^{d_1-d_2}$ affermazioni \mathcal{T}^{**} relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1}$, di room genericamente indicata con \mathcal{R}^{**} . Fissiamo una delle affermazioni \mathcal{T}^* (con room \mathcal{R}^*) e consideriamo una qualsiasi delle affermazioni \mathcal{T}^{**} ottenute da questa. Per il Lemma 5.6, possiamo determinare serie di riduzioni per cui vale:

$$\left| \mathcal{R}^{**} - \frac{1}{4^{d_2-d_1}} \mathcal{R}^* \right| \leq \left[2^{d_1+1} + 2^{d_2-1} \right] c.$$

Da queste disequaglianze si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{**} &\leq \frac{1}{4^{d_2-d_1}} \mathcal{R}^* + c \left[2^{d_1+1} + 2^{d_2-1} \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{4^{d_2-d_1}} \left[\frac{1}{2^{d_3-d_2}} \mathcal{R} + (2^{d_1} + 2^{d_2})c - 1 \right] + c \left(2^{d_1+1} + 2^{d_2-1} \right) = \\ &= \frac{1}{4^{d_2-d_1} 2^{d_3-d_2}} \mathcal{R} + \left(2^{3d_1-2d_2} + 2^{2d_1-d_2} + 2^{d_1+1} + 2^{d_2-1} \right) c. \end{aligned}$$

E analogamente anche:

$$\mathcal{R}^{**} \geq \frac{1}{4^{d_2-d_1} 2^{d_3-d_2}} \mathcal{R} - \left(2^{3d_1-2d_2} + 2^{2d_1-d_2} + 2^{d_1+1} + 2^{d_2-1} \right) c.$$

Dunque tutte le affermazioni ottenute, relative al caso cubico $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_1}$, hanno room che soddisfano:

$$\left| \mathcal{R}^{**} - \frac{1}{4^{d_2-d_1} 2^{d_3-d_2}} \mathcal{R} \right| \leq \left(2^{3d_1-2d_2} + 2^{2d_1-d_2} + 2^{d_1+1} + 2^{d_2-1} \right) c - 1. \quad (5.14)$$

A questo punto fissiamo una delle affermazioni \mathcal{T}^{**} (con room \mathcal{R}^{**}) e indichiamo con \mathcal{T}_{fin} (e con \mathcal{R}_{fin} la sua room) una delle 8^{d_1} affermazioni relative a $\mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$ che si ottengono da una sequenza di riduzioni di \mathcal{T}^{**} . Per la Proposizione 5.3 è possibile applicare una serie di riduzioni per cui vale che:

$$\left| \mathcal{R}_{fin} - \frac{1}{8^{d_1}} \mathcal{R}^{**} \right| \leq 3c.$$

Dunque considerando questa disequaglianza e la (5.14), si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{fin} &\leq \frac{1}{8^{d_1}} \mathcal{R}^{**} + 3c \leq \\ &\leq \frac{1}{8^{d_1}} \left[\frac{1}{4^{d_2-d_1} 2^{d_3-d_2}} \mathcal{R} + \left(2^{3d_1-2d_2} + 2^{2d_1-d_2} + 2^{d_1+1} + 2^{d_2-1} \right) c \right] + 3c \leq \\ &\leq \frac{1}{8^{d_1} 4^{d_2-d_1} 2^{d_3-d_2}} \mathcal{R} + \left(2^{-2d_2} + 2^{-d_1-d_2} + 2^{-2d_1+1} + 2^{d_2-3d_1-1} \right) c + 3c. \end{aligned}$$

E analogamente anche:

$$\mathcal{R}_{fin} \geq \frac{1}{8^{d_1} 4^{d_2-d_1} 2^{d_3-d_2}} \mathcal{R} - \left(2^{-2d_2} + 2^{-d_1-d_2} + 2^{-2d_1+1} + 2^{d_2-3d_1-1} \right) c - 3c,$$

Dunque, osservando che $8^{d_1} 4^{d_2-d_1} 2^{d_3-d_2} = 2^{d_1+d_2+d_3}$, possiamo concludere che \mathcal{T} può essere ridotta in $2^{d_1+d_2+d_3}$ affermazioni, con room genericamente indicata con \mathcal{R}_{fin} , che soddisfano la condizione:

$$\left| \mathcal{R}_{fin} - \frac{1}{2^{d_1+d_2+d_3}} \mathcal{R} \right| \leq \left(2^{-2d_2} + 2^{-d_1-d_2} + 2^{-2d_1+1} + 2^{d_2-3d_1-1} + 3 \right) c,$$

e perciò vale la tesi. \square

Anche in questo caso, come nel caso cubico, questi risultati permettono di dare una stima degli estremi della regione di sicurezza della varietà considerata. In particolare vale il risultato seguente:

Proposizione 5.8. *Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3}$ una varietà di Segre con $n_j + 1 = 2^{d_j} c$ per certi interi c, d_1, d_2, d_3 e sia $Y = \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1} \times \mathbb{P}^{c-1}$. Siano $\mathcal{O}_+, \mathcal{O}_-$ gli estremi di sicurezza di Y e $\mathcal{O}_+, \mathcal{O}_-$ quelli di X .*

Posto $C = \left(2^{-2d_2} + 2^{-d_1-d_2} + 2^{-2d_1+1} + 2^{d_2-3d_1-1} + 3 \right) c$, vale che:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_+^* &\leq 2^{d_1+d_2+d_3}(\mathcal{O}_+ + C), \\ \mathcal{O}_-^* &\geq 2^{d_1+d_2+d_3}(\mathcal{O}_- - C).\end{aligned}\tag{5.15}$$

Dimostrazione. Consideriamo un'affermazione $\mathcal{T} = T(n_1, n_2, n_3; s; a_1, a_2, a_3)$ di room $\mathcal{R} \geq 2^{d_1+d_2+d_3}(\mathcal{O}_+ + C)$. Mostriamo che tale affermazione è vera. Per la Proposizione 5.7 esiste un albero di riduzione per \mathcal{T} le cui foglie corrispondono ad affermazioni $\mathcal{T}_{fin} = T(c-1, c-1, c-1; s^{fin}; a_1^{fin}, a_2^{fin}, a_3^{fin})$ di room \mathcal{R}_{fin} per cui vale la (5.13). In particolare si ha:

$$\mathcal{R}_{fin} \geq \frac{1}{2^{d_1+d_2+d_3}}\mathcal{R} - C \geq \frac{1}{2^{d_1+d_2+d_3}} \left[2^{d_1+d_2+d_3}(\mathcal{O}_+ + C) \right] - C \geq \mathcal{O}_+$$

Perciò le affermazioni \mathcal{T}_{fin} hanno room nella regione di sicurezza di Y , e perciò sono vere. Inoltre hanno tutte la stessa abbondanza in quanto $\mathcal{O}_+ \geq 0$ e dunque per il Teorema 5.1 tutte le riduzioni dell'albero sono ammissibili. Perciò per il Teorema 2.7 anche \mathcal{T} è vera e quindi $\mathcal{O}_+^* \leq 2^{d_1+d_2+d_3}(\mathcal{O}_+ + C)$.

Analogamente considerando un'affermazione superabbondante, si dimostra che $\mathcal{O}_-^* \geq 2^{d_1+d_2+d_3}(\mathcal{O}_- - C)$. \square

5.3 Riduzione del numero di fattori

La tecnica adottata in questi paragrafi, che ci permette di ridurre certe affermazioni mantenendo il controllo sulla room durante la riduzione, può essere applicata anche a varietà di Segre con un alto numero di fattori. In particolare si mostrerà che è possibile, sotto opportune ipotesi, applicare molte riduzioni su un solo fattore fino ad ottenere affermazioni in cui tale fattore è stato ridotto a \mathbb{P}^0 . A questo punto sarà possibile applicare la Proposizione 2.11 ottenendo affermazioni che si riferiscono a una varietà con un numero più basso di fattori.

Consideriamo per semplicità una varietà con quattro fattori $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3} \times \mathbb{P}^{n_4}$; i risultati che otteniamo si generalizzeranno facilmente. Consideriamo un'affermazione $\mathcal{T} = T(n_1, \dots, n_4; s; a_1, \dots, a_4)$, a cui applicheremo una riduzione sul quarto fattore con $n'_4 + 1 = 1$ e $n''_4 + 1 = n_4$, ottenendo due affermazioni: \mathcal{T}' , a cui può essere applicata la Proposizione 2.11, e \mathcal{T}'' , che è della stessa forma di \mathcal{T} con $n_4 - 1$ in luogo di n_4 . Applichiamo quindi a \mathcal{T}'' una riduzione analoga a quella appena fatta, e proseguiamo applicando ogni volta una riduzione sulla seconda affermazione ottenuta.

Indichiamo come segue la serie di riduzioni ottenute:

- con \mathcal{T}_0 indichiamo l'affermazione iniziale \mathcal{T} ;
- le due affermazioni ottenute dalla riduzione di \mathcal{T}_0 saranno indicate con \mathcal{T}'_1 e \mathcal{T}''_1 ;

- ad ogni passo, con \mathcal{T}'_k e \mathcal{T}''_k indichiamo le affermazioni ottenute dalla riduzione di \mathcal{T}''_{k-1} ;
- per ogni k , con \mathcal{R}'_k e \mathcal{R}''_k indichiamo le room rispettivamente di \mathcal{T}'_k e \mathcal{T}''_k .

Ad ogni passo le proporzioni in cui viene divisa la dimensione del quarto fattore sono date da:

$$\gamma'_k = \frac{1}{n_4 + 1 - (k-1)}, \quad \gamma''_k = \frac{n_4 - (k-1)}{n_4 + 1 - (k-1)}.$$

Dopo $k = n_4$ passi si arriva ad ottenere $n_4 + 1$ affermazioni relative alla varietà $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3} \times \mathbb{P}^0$, a cui sarà possibile applicare la Proposizione 2.11 in modo da ricondurci al caso con tre fattori. Forniamo dei risultati che permettono di controllare la room in questa serie di riduzioni.

Lemma 5.9. *Per ogni $k = 1, \dots, n_4$, vale:*

$$\left| \mathcal{R}''_k - \left(\prod_{j=1}^k \gamma''_j \right) \mathcal{R} \right| \leq \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \left[1 + \left(\sum_{j=2}^k \prod_{\ell=j}^k \gamma''_\ell \right) \right]. \quad (5.16)$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su k . Se $k = 1$, si ha la tesi per (4.1); infatti:

$$|\mathcal{R}''_1 - \gamma''_1 \mathcal{R}| \leq \frac{n_1 + n_2 + n_3}{2}.$$

Supponiamo quindi che la tesi sia valida per il valore $k-1$ e verifichiamo che è valida per k :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}''_k &\leq \gamma''_k \mathcal{R}''_{k-1} + \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \leq \\ &\leq \gamma''_k \left\{ \left(\prod_{j=1}^{k-1} \gamma''_j \right) \mathcal{R} + \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \left[1 + \left(\sum_{j=2}^{k-1} \prod_{\ell=j}^{k-1} \gamma''_\ell \right) \right] \right\} + \\ &\quad + \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) = \\ &= \left(\prod_{j=1}^k \gamma''_j \right) \mathcal{R} + \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \left[1 + \gamma''_k + \left(\sum_{j=2}^{k-1} \gamma''_k \prod_{\ell=j}^{k-1} \gamma''_\ell \right) \right] = \\ &= \left(\prod_{j=1}^k \gamma''_j \right) \mathcal{R} + \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \left[1 + \left(\sum_{j=2}^k \prod_{\ell=j}^k \gamma''_\ell \right) \right]. \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra anche la disuguaglianza:

$$\mathcal{R}_k'' \geq \left(\prod_{j=1}^k \gamma_j'' \right) \mathcal{R} - \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \left[1 + \left(\sum_{j=2}^k \prod_{\ell=j}^k \gamma_\ell'' \right) \right].$$

E perciò si ha la tesi. \square

Grazie al Lemma 5.9 e al Teorema 4.6, possiamo dare una stima anche per il valore \mathcal{R}'_k .

Lemma 5.10. *Per ogni $k = 1, \dots, n_4$ si ha:*

$$\left| \mathcal{R}'_k - \frac{1}{n_4 + 1} \mathcal{R} \right| \leq \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \left[1 + \log \left(\frac{n_4}{n_4 + 2 - k} \right) \right].$$

Dimostrazione. Applicando (4.1), si ottiene:

$$|\mathcal{R}'_k - \gamma'_k \mathcal{R}''_{k-1}| \leq \frac{n_1 + n_2 + n_3}{2}.$$

Dunque per il Lemma 5.9, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_k &\leq \gamma'_k \mathcal{R}''_{k-1} + \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \leq \\ &\leq \gamma'_k \left\{ \left(\prod_{j=1}^{k-1} \gamma_j'' \right) \mathcal{R} + \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \left[1 + \left(\sum_{j=2}^{k-1} \prod_{\ell=j}^{k-1} \gamma_\ell'' \right) \right] \right\} + \\ &\quad + \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) = \\ &= \left(\gamma'_k \prod_{j=1}^{k-1} \gamma_j'' \right) \mathcal{R} + \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \left[1 + \gamma'_k + \left(\sum_{j=2}^{k-1} \gamma'_k \prod_{\ell=j}^{k-1} \gamma_\ell'' \right) \right] = \\ &= \left(\gamma'_k \prod_{j=1}^{k-1} \gamma_j'' \right) \mathcal{R} + \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \left[1 + \left(\sum_{j=2}^k \gamma'_k \prod_{\ell=j}^{k-1} \gamma_\ell'' \right) \right]. \end{aligned}$$

Analogamente vale anche la disuguaglianza:

$$\mathcal{R}'_k \geq \left(\gamma'_k \prod_{j=1}^{k-1} \gamma_j'' \right) \mathcal{R} - \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \left[1 + \left(\sum_{j=2}^k \gamma'_k \prod_{\ell=j}^{k-1} \gamma_\ell'' \right) \right].$$

Le due osservazioni seguenti, di immediata verifica, ci portano alla tesi:

- per ogni $k = 1, \dots, n_k$, si ha $\gamma'_k \prod_{\ell=j}^{k-1} \gamma_\ell'' = \gamma'_j$;
- vale la stima $\sum_{\ell=2}^k \gamma'_\ell \leq \log \left(\frac{n_4}{n_4 - (k-2)} \right)$.

\square

Chiaramente per $k = n_4$, si ha $\gamma'_k = \gamma''_k = \frac{1}{2}$. Inoltre in questo caso il valore assunto da $\frac{n_4}{n_4+2-k}$ è massimo (con k limitato all'insieme $\{1, \dots, n_4\}$). Perciò dal Lemma 5.10, si ottiene, per ognuna delle $n_4 + 1$ affermazioni ottenute alla fine del procedimento, la condizione seguente:

$$\left| \mathcal{R}^* - \frac{1}{n_4 + 1} \mathcal{R} \right| \leq \left(\frac{n_1 + n_2 + n_3}{2} \right) \left[1 + \log \left(\frac{n_4}{2} \right) \right]. \quad (5.17)$$

dove con \mathcal{R}^* abbiamo indicato la room di una qualsiasi delle affermazioni \mathcal{T}^* relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \mathbb{P}^{n_2} \times \mathbb{P}^{n_3} \times \mathbb{P}^0$ ottenute nel procedimento.

Come si può notare dalle dimostrazioni dei lemmi precedenti, il numero di fattori della varietà considerata non ha avuto alcuna influenza. Perciò il risultato ottenuto può essere facilmente generalizzato. Tuttavia per poter dedurre la validità dell'affermazione \mathcal{T} dalla validità delle affermazioni \mathcal{T}^* è necessario che tutte le riduzioni siano ammissibili. Possiamo quindi enunciare il seguente risultato:

Proposizione 5.11. *Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k}$ una varietà di Segre e sia $\mathcal{T} = T(n_1, \dots, n_k; s; a_1, \dots, a_k)$ un'affermazione di room \mathcal{R} . Allora è possibile costruire un albero di riduzione per \mathcal{T} le cui foglie corrispondono ad affermazioni relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n-1}$, con room indicata genericamente con \mathcal{R}^* , per cui vale:*

$$\left| \mathcal{R}^* - \frac{1}{n_k + 1} \mathcal{R} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i \right) \left[1 + \log \left(\frac{n_k}{2} \right) \right]. \quad (5.18)$$

Inoltre se vale

$$|\mathcal{R}| \geq (n_k + 1) \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i \right) \left[1 + \log \left(\frac{n_k}{2} \right) \right], \quad (5.19)$$

tutte le riduzioni dell'albero sono ammissibili.

Dimostrazione. La dimostrazione della prima parte dell'enunciato è evidente per il risultato del Lemma 5.10. La dimostrazione della seconda parte si ottiene dalla (5.18), in quanto la (5.19) garantisce che le foglie dell'albero corrispondano ad affermazioni che hanno la stessa abbondanza di \mathcal{T} . Per il Teorema 5.1 si ha la tesi. \square

Forniamo a questo punto un risultato di carattere puramente aritmetico, che suggerisce che questo tipo di riduzione è più efficace se applicato sul fattore di dimensione minima. Vale infatti il seguente lemma:

Lemma 5.12. *Sia $k \geq 3$ e siano n_1, \dots, n_k numeri naturali con $n_1 \leq \dots \leq n_k$. Per $j = 1, \dots, k$, sia $P_j = (n_j + 1) \left(\sum_{i \neq j} n_i \right) \left[1 + \log \left(\frac{n_j}{2} \right) \right]$. Allora si ha che $P_1 \leq \dots \leq P_k$.*

Dimostrazione. Fissiamo due valori j_1 e j_2 con $j_1 \leq j_2$ e definiamo $P_{j_1}^* = (n_{j_1} + 1) \left(\sum_{i \neq j_1} n_i \right)$. Dimostriamo che $P_{j_1}^* \leq P_{j_2}^*$. Si ha:

$$P_{j_1}^* = n_{j_1} n_{j_2} + n_{j_1} \left(\sum_{i \neq j_1, j_2} n_i \right) + n_{j_2} + \sum_{i \neq j_1, j_2} n_i,$$

$$P_{j_2}^* = n_{j_2} n_{j_1} + n_{j_2} \left(\sum_{i \neq j_1, j_2} n_i \right) + n_{j_1} + \sum_{i \neq j_1, j_2} n_i.$$

Perciò per differenza si ha:

$$P_{j_2}^* - P_{j_1}^* = (n_{j_2} - n_{j_1}) \left[\sum_{i \neq j_1, j_2} n_i - 1 \right]$$

e dunque $P_{j_1}^* \leq P_{j_2}^*$. Inoltre, è evidente che $\log\left(\frac{n_{j_1}}{2}\right) \leq \log\left(\frac{n_{j_2}}{2}\right)$ e dunque si ha la tesi. \square

Questo risultato consente di dedurre che, scegliendo per la riduzione il fattore di dimensione più bassa, la condizione (5.19) della Proposizione 5.11 dà una limitazione meno stretta, e perciò è più facile che sia verificata.

Alla fine del procedimento otteniamo quindi una serie di affermazioni della forma:

$$\mathcal{T}^* = T(n_1, \dots, n_{k-1}, 0; s^*; a_1^*, \dots, a_{k-1}^*, a_k^*).$$

La Proposizione 2.11 afferma che condizione sufficiente affinché siano vere le affermazioni \mathcal{T}^* è che lo siano anche le $T(n_1, \dots, n_{k-1}; s^*; a_1^*, \dots, a_{k-1}^*)$. In questo caso, se le riduzioni sono ammissibili, risulterebbe vera anche \mathcal{T} . Tuttavia non è possibile dare una stima della differenza tra la room di $T(n_1, \dots, n_{k-1}; s^*; a_1, \dots, a_{k-1})$ e quella di $T(n_1, \dots, n_{k-1}, 0; s^*; a_1^*, \dots, a_{k-1}^*, a_k^*)$ che dipenda solo dalle dimensioni dei fattori. Infatti tale differenza è esattamente a_k^* che dipende dall'affermazione iniziale \mathcal{T} e dalle riduzioni che vengono scelte, e non solo dalle dimensioni dei fattori. Non possiamo quindi immediatamente iterare il procedimento senza perdere il controllo sulla room.

Per ovviare a questo problema adotteremo una strategia leggermente diversa: una volta ridotta l'affermazioni \mathcal{T} ad affermazioni relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_{k-1}} \times \mathbb{P}^0$, possiamo considerare ciascuna di queste affermazioni e ridurla a $n_{k-1} + 1$ affermazioni relative a $\mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_{k-2}} \times \mathbb{P}^0 \times \mathbb{P}^0$. Solo una volta che si raggiunge il numero di \mathbb{P}^0 desiderato, applicheremo la Proposizione 2.11, per verificare se le affermazioni ottenute, relative a varietà di Segre con un basso numero di fattori, sono effettivamente valide.

Studiamo quali stime possono essere date sulla room delle affermazioni che si ottengono in questo procedimento. In seguito indicheremo con $\mathcal{T}^{(1)}$ una generica delle affermazioni ottenute da \mathcal{T} dopo le riduzioni sul k -esimo fattore, e con $\mathcal{T}^{(m)}$ una generica delle affermazioni ottenute da $\mathcal{T}^{(m-1)}$ dopo le riduzioni sull'ultimo fattore diverso da \mathbb{P}^0 . Con $\mathcal{R}^{(m)}$ indicheremo le room corrispondenti.

Vale il risultato seguente:

Lemma 5.13. *Per ogni m , vale che:*

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{R}^{(m)} - \left(\frac{1}{\prod_{j=0}^{m-1} (n_{k-j} + 1)} \right) \mathcal{R} \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^m \left(\frac{1}{\prod_{j=\ell}^{m-1} (n_{k-j} + 1)} \right) \left[1 + \log \left(\frac{n_{k-\ell} + 1}{2} \right) \right] \left(\sum_{i=1}^{k-\ell} n_i \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su m . Per $m = 1$ la tesi è valida per (5.18).

Supponiamo quindi che la tesi sia valida per un valore m , e mostriamo che è valida per $m + 1$. Analogamente a come si è arrivati a (5.18), si può mostrare che

$$\left| \mathcal{R}^{(m)} - \frac{1}{n_{k-m+1}} \mathcal{R}^{(m-1)} \right| \leq \frac{1}{2} \left[1 + \log \left(\frac{n_{k-m+1}}{2} \right) \right] \left(\sum_{i=1}^{k-m} n_i \right),$$

da cui, sfruttando l'ipotesi induttiva, si ottiene la disuguaglianza seguente, e dunque la tesi.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(m)} &\leq \frac{1}{n_{k-m+1}} \left\{ \left(\frac{1}{\prod_{j=0}^{m-1} (n_{k-j} + 1)} \right) \mathcal{R} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^m \left(\frac{1}{\prod_{j=\ell}^{m-1} (n_{k-j} + 1)} \right) \left[1 + \log \left(\frac{n_{k-\ell} + 1}{2} \right) \right] \left(\sum_{i=1}^{k-\ell} n_i \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[1 + \log \left(\frac{n_{k-m+1}}{2} \right) \right] \left(\sum_{i=1}^{k-m} n_i \right). \end{aligned}$$

□

Una facile applicazione della Proposizione 2.11 ci permette di dare il risultato seguente:

Proposizione 5.14. *Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_{k-1}} \times \mathbb{P}^0$ e sia $Y = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_{k-1}}$. Siano \mathcal{O}_+^X e \mathcal{O}_-^X gli estremi di sicurezza di X e \mathcal{O}_+^Y e \mathcal{O}_-^Y quelli di Y . Allora vale che:*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_+^X &= \mathcal{O}_+^Y \\ \mathcal{O}_-^X &\leq \mathcal{O}_-^Y \end{aligned} \quad (5.21)$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{T} = T(n_1, \dots, n_{k-1}, 0; s; a_1, \dots, a_k)$ un'affermazione subabbondante relativa alla varietà X , con room $\mathcal{R} \geq \mathcal{O}_+^Y$. La corrispondente affermazione relativa a Y , $T(n_1, \dots, n_{k-1}; s; a_1, \dots, a_{k-1})$, ha room $\mathcal{R} + a_k$ e dunque è vera. Per la Proposizione 2.11, si ottiene che anche \mathcal{T} è vera. Perciò $\mathcal{O}_+^X \leq \mathcal{O}_+^Y$. Consideriamo dunque $\mathcal{T} = T(n_1, \dots, n_{k-1}; s; a_1, \dots, a_{k-1})$ relativa a Y con room $\mathcal{R} \geq \mathcal{O}_+^X$. Anche l'affermazione $T(n_1, \dots, n_{k-1}, 0; s; a_1, \dots, a_{k-1}, 0)$ ha room \mathcal{R} e perciò è vera. Per la Proposizione 2.11, anche \mathcal{T} è vera e perciò $\mathcal{O}_+^Y \leq \mathcal{O}_+^X$. Dunque $\mathcal{O}_+^Y = \mathcal{O}_+^X$.

Con lo stesso argomento utilizzato per dimostrare che $\mathcal{O}_+^Y \leq \mathcal{O}_+^X$ si può mostrare anche che $\mathcal{O}_-^X \geq \mathcal{O}_-^Y$ \square

È evidente che il Lemma 5.13 offre una stima ben poco maneggevole; tuttavia, indicando con Δ il termine destro della disequaglianza (5.20), possiamo dare un risultato in merito alla regione di sicurezza analogo a quelli forniti nei paragrafi precedenti. Tuttavia, in questo caso, il risultato può essere enunciato solo per situazioni subabbondanti, in quanto, nella Proposizione 5.14, vale una sola disequaglianza nella situazione superabbondante:

Proposizione 5.15. *Sia $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_k}$ una varietà di Segre e sia $Y = \mathbb{P}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{n_{k-m}}$ per un certo $m \leq k$. Siano \mathcal{O}_+ e \mathcal{O}_+^* gli estremi di sicurezza positivi di Y e di X , rispettivamente. Allora vale che:*

$$\mathcal{O}_+^* \leq (\mathcal{O}_+ + \Delta) \prod_{j=0}^{m-1} (n_{k-j} + 1), \quad (5.22)$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{T} = T(n_1, \dots, n_k; s; a_1, \dots, a_k)$ un'affermazione di room $\mathcal{R} \geq (\mathcal{O}_+ + \Delta) \prod_{j=0}^{m-1} (n_{k-j} + 1)$. Mostriamo che \mathcal{T} è vera. Per il Lemma 5.13 esiste un albero di riduzione per \mathcal{T} le cui foglie corrispondono ad affermazioni della forma $\mathcal{T}' = T(n_1, \dots, n_{k-m}, 0, \dots, 0; s'; a'_1, \dots, a'_k)$, di room \mathcal{R}' per cui vale:

$$\mathcal{R}' \geq \frac{1}{\prod_{j=0}^{m-1} (n_{k-j} + 1)} \mathcal{R} - \Delta \geq \mathcal{O}_+^*.$$

Dunque le affermazioni \mathcal{T}' hanno room nella regione di sicurezza di Y e perciò sono vere. Inoltre hanno tutte la stessa abbondanza e perciò per il Teorema 5.1 tutte le riduzioni dell'albero sono ammissibili. Dunque per il Teorema 2.7 è vera anche \mathcal{T} . \square

Capitolo 6

Il caso $(\mathbb{P}^n)^4$ in dimensione piccola

In questo capitolo verranno trattate in maniera esplicita le varietà di Segre della forma $(\mathbb{P}^n)^4$, per $n \leq 10$. In particolare mostreremo che queste varietà non hanno secanti difettive, eccetto, al più, le seguenti:

- la 3-secante di $(\mathbb{P}^1)^4$;
- la 199-secante di $(\mathbb{P}^8)^4$;
- la 257-secante di $(\mathbb{P}^{10})^4$.

La $\sigma_3((\mathbb{P}^1)^4)$ è difettiva, in quanto rientra nel caso descritto dalla Proposizione 2.21. Negli altri due casi citati, non è possibile applicare la tecnica induttiva per dimostrare la non difettività delle secanti in questione.

Per determinare la validità delle affermazioni relative alle varietà secanti che abbiamo trattato, è stato fatto largo uso del software Macaulay2 (cfr. [GS]), che ci permette di verificare che una data affermazione $T(n_1, \dots, n_4; s; a_1, \dots, a_4)$ è vera con il calcolo esplicito. Lo script utilizzato è riportato in Appendice B. Tuttavia, il software risponde in tempo utile solo a istanze che riguardano affermazioni relative a varietà di Segre di dimensione più bassa della $(\mathbb{P}^6)^4$. Per le varietà di dimensione superiore è stato costruito un albero di riduzione che permette di ricondurre la validità di una data affermazione alla validità di affermazioni di dimensione più bassa, che possono essere verificate con il calcolo esplicito. Gli alberi di riduzione sono spesso rappresentati graficamente.

Forniamo prima un risultato generale che riguarda le varietà della forma $(\mathbb{P}^n)^k$, tratto da [AOP].

Enunciamo prima un lemma tecnico che ci sarà utile in seguito.

Lemma 6.1 ([AOP] - Lemma 5.1). *Siano n un intero positivo. Per ogni k intero positivo, siano $s_k = \left\lfloor \frac{(n+1)^k}{nk+1} \right\rfloor$ e $\delta_k \in \{0, \dots, n+1\}$ con $\delta_k \equiv s_k \pmod{n+1}$. Sia $q = \frac{s_k - \delta_k}{n+1}$. Allora vale che:*

(i) Se $k = 4$ e $n \geq 12$, oppure se $k = 5$ e $n \geq 4$, oppure se $k = 6, 7, 8$ e $n \geq 2$, oppure se $k = 9$ e $n \geq 1$, allora $q + 1 \leq s_{k-1} - \delta_{k-1}$;

(ii) $(q + 1)(nk - n + 1) + (s_k - \delta_k) - q + n \geq (n + 1)^{k-1}$.

Teorema 6.2 ([AOP] - Teorema 5.2). Sia $X = (\mathbb{P}^n)^k$ con $k \geq 3$. Siano s_k e δ_k definiti da:

$$s_k = \left\lfloor \frac{(n+1)^k}{nk+1} \right\rfloor,$$

$$\delta_k \in \{0, \dots, n\} \text{ tale che } \delta_k \equiv s_k \pmod{n+1}.$$

Allora valgono i fatti seguenti:

- se $s \leq s_k - \delta_k$, allora $\sigma_s(X)$ ha la dimensione aspettata;
- se $s \geq s_k - \delta_k + (n + 1)$, allora $\sigma_s(X)$ satura l'ambiente.

Dimostrazione. Procederemo per induzione su k dimostrando che $T(n^k; s_k - \delta_k; 0^k)$ e $T(n^k; s_k - \delta_k + (n + 1); 0^k)$ sono vere. È noto che $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ non ha secanti difettive per ogni $n \geq 3$ e che $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ è perfetta, ovvero ha una secante equiabbondante e non difettiva, e quindi tutte le sue secanti sono non difettive (cfr. [Li1] e il caso relativo a $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ del Paragrafo 6.1).

Si verifica facilmente che $T(n^k; s_k - \delta_k; 0^k)$ è subabbondante. Supponiamo dunque per ipotesi induttiva che $T(n^{k-1}; s_{k-1} - \delta_{k-1}; 0^{k-1})$ sia vera e mostriamo che anche $T(n^k; s_k - \delta_k; 0^k)$ è vera. Sia $q = \frac{s_k - \delta_k}{n+1}$. Dopo $n + 1$ riduzioni sul primo fattore $T(n^k; s_k - \delta_k; 0^k)$ si riduce a $T(0, n^{k-1}; q; (s_k - \delta_k - q), 0^{k-1})$, che per la Proposizione 2.11, può essere ridotta a sua volta a $T(n^{k-1}; q; 0^{k-1})$. Per ipotesi induttiva si ha che $T(n^{k-1}; s_{k-1} - \delta_{k-1}; 0^{k-1})$ è vera e quindi è sufficiente mostrare che $q \leq s_k - \delta_k$ per avere la tesi. Per il Lemma 6.1, si ha che la tesi è valida per ogni scelta di k e n eccetto, al più, in un numero finito di casi. Tuttavia nei casi in cui non può essere applicato il Lemma 6.1 si può mostrare con il calcolo esplicito che l'affermazione è vera.

Consideriamo dunque l'affermazione $T(n^k; s_k - \delta_k + (n + 1); 0^k)$, che è superabbondante. per ipotesi induttiva supponiamo che $T(n^{k-1}; s_{k-1} - \delta_{k-1} + (n + 1); 0^{k-1})$ sia vera per ogni $k \geq 4$. Analogamente al caso precedente, possiamo ridurre $T(n^k; s_k - \delta_k + (n + 1); 0^k)$ a $n + 1$ copie di $T(0, n^{k-1}; q + 1; s_k - \delta_k - q + n, 0^{k-1})$. Per la Proposizione 2.11, condizione sufficiente affinché questa affermazione sia vera è che sia vera $T(n^{k-1}; q + 1; 0^{k-1})$, che, per il Lemma 6.1, e la prima parte della dimostrazione, è sempre vera tranne al più in un numero finito di casi. Nei casi in cui non può essere applicato il Lemma 6.1 si può verificare con il calcolo esplicito che l'affermazione è vera. \square

A questo punto, con l'ausilio di questo risultato, studiamo i vari casi di $(\mathbb{P}^n)^4$ con $n \leq 10$.

6.1 Casi trattati con il calcolo esplicito

In questo primo paragrafo analizziamo i casi che possono essere trattati direttamente con il software.

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

Questa varietà di Segre rientra nel caso trattato dalla Proposizione 2.21. Si deduce che $\sigma_s((\mathbb{P}^1)^4)$ è difettiva per $s = 3$ e ha la dimensione aspettata altrimenti. In particolare si ottiene che $\underline{\mathbf{R}}((\mathbb{P}^1)^4) = 4$.

$$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$$

Questa varietà è perfetta, in quanto $\sigma_9((\mathbb{P}^2)^4)$ dà luogo all'affermazione equiabbondante $T(2^4; 9; 0^4)$. Con il calcolo esplicito si può verificare che tale affermazione è vera. In particolare si ha $\underline{\mathbf{R}}((\mathbb{P}^2)^4) = 9$.

$$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$$

$\sigma_{19}((\mathbb{P}^3)^4)$ è l'ultima secante subabbondante di $(\mathbb{P}^3)^4$, mentre $\sigma_{20}((\mathbb{P}^3)^4)$ è la prima superabbondante. Si può verificare con il calcolo esplicito che $T(3^4; 19; 0^4)$ è vera, mentre $T(3^4; 20; 0^4)$ è vera per la Proposizione 6.2. In particolare si ha $\underline{\mathbf{R}}((\mathbb{P}^3)^4) = 20$.

$$\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$$

Per questa varietà risulta che $\sigma_{36}((\mathbb{P}^4)^4)$ è l'ultima secante subabbondante, mentre $\sigma_{37}((\mathbb{P}^4)^4)$ è la prima superabbondante. Si può verificare con il calcolo esplicito che le affermazioni $T(4^4; 36; 0^4)$ e $T(4^4; 37; 0^4)$ sono vere. In particolare si ottiene che $\underline{\mathbf{R}}((\mathbb{P}^4)^4) = 37$.

$$\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$$

Per questa varietà di Segre si ha che l'ultima secante subabbondante è $\sigma_{61}((\mathbb{P}^5)^4)$ mentre la prima superabbondante è $\sigma_{62}((\mathbb{P}^5)^4)$. Il Teorema 6.2 garantisce che $\sigma_{60}((\mathbb{P}^5)^4)$ e $\sigma_{66}((\mathbb{P}^5)^4)$ siano non difettive. Con il calcolo esplicito è possibile mostrare che $T(5^4; 61; 0^4)$ e $T(5^4; 62; 0^4)$ sono vere, e quindi che $(\mathbb{P}^5)^4$ non ha secanti difettive. In particolare risulterà che $\underline{\mathbf{R}}((\mathbb{P}^5)^4) = 62$.

$$\mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6 \times \mathbb{P}^6$$

Per la varietà di Segre $(\mathbb{P}^6)^4$ si ha che l'ultima secante subabbondante è $\sigma_{96}((\mathbb{P}^6)^4)$ mentre la prima superabbondante è $\sigma_{97}((\mathbb{P}^6)^4)$. Il Teorema 6.2 garantisce che la 91-secante e la 98-secante non sono difettive. Con il calcolo esplicito è possibile mostrare

che $T(6^4; 96; 0^4)$ e $T(6^4; 97; 0^4)$ sono vere. Dunque $(\mathbb{P}^6)^4$ non ha secanti difettive e $\underline{\mathbf{R}}((\mathbb{P}^6)^4) = 97$.

6.2 Riduzione dei casi di dimensione più alta

A partire dalla varietà $(\mathbb{P}^7)^4$ non è più possibile utilizzare il software per calcolare direttamente la dimensione delle varietà secanti. Perciò a partire da adesso costruiremo per ogni affermazione un albero di riduzione, che permetta di ricondurne la validità ad affermazioni di dimensione più bassa, che possono essere verificate con il calcolo esplicito. Gli alberi di riduzione verranno rappresentati graficamente, almeno in parte. Spesso si affermerà che è possibile verificare con il calcolo esplicito che le foglie degli alberi costruiti corrispondono ad affermazioni vere: tuttavia talvolta, prima di utilizzare il software potrebbe essere necessario applicare ancora un passaggio di riduzione alla foglia considerata, principalmente per ridurre i tempi che il software impiega per risolvere una singola istanza del problema.

$$\mathbb{P}^7 \times \mathbb{P}^7 \times \mathbb{P}^7 \times \mathbb{P}^7$$

Per la varietà $(\mathbb{P}^7)^4$ si ha che l'ultima secante subabbondante è $\sigma_{141}((\mathbb{P}^7)^4)$, mentre la prima superabbondante è $\sigma_{142}((\mathbb{P}^7)^4)$. In questo caso la Proposizione 6.2 assicura che siano non difettive $\sigma_{136}((\mathbb{P}^7)^4)$ e $\sigma_{144}((\mathbb{P}^7)^4)$. Mostreremo che anche le altre secanti sono non difettive:

Proposizione 6.3. $\sigma_{141}((\mathbb{P}^7)^4)$ e $\sigma_{142}((\mathbb{P}^7)^4)$ sono non difettive.

Dimostrazione. Consideriamo l'affermazione $T(7^4; 141; 0^4)$. Questa affermazione si riduce in $T(1, 7^3; 35; 106, 0^3)$ e $T(5, 7^3; 106; 35, 0^3)$, entrambe subabbondanti. In Figura 6.1 e in Figura 6.2 sono rappresentati due alberi di riduzione per queste affermazioni. Si può dimostrare con il calcolo esplicito che tutte le foglie degli alberi in questione corrispondono ad affermazioni vere e subabbondanti e dunque si ottiene che $\sigma_{141}((\mathbb{P}^7)^4)$ è non difettiva.

In modo analogo, per $\sigma_{142}((\mathbb{P}^7)^4)$ possiamo costruire l'albero di riduzione in Figura 6.3. Anche in questo caso tutte le foglie dell'albero corrispondono ad affermazioni vere e superabbondanti. Dunque $\sigma_{142}((\mathbb{P}^7)^4)$ è non difettiva. □

Si è mostrato che $\mathbb{P}^7 \times \mathbb{P}^7 \times \mathbb{P}^7 \times \mathbb{P}^7$ non ha secanti difettive. In particolare $\underline{\mathbf{R}}((\mathbb{P}^7)^4) = 142$.

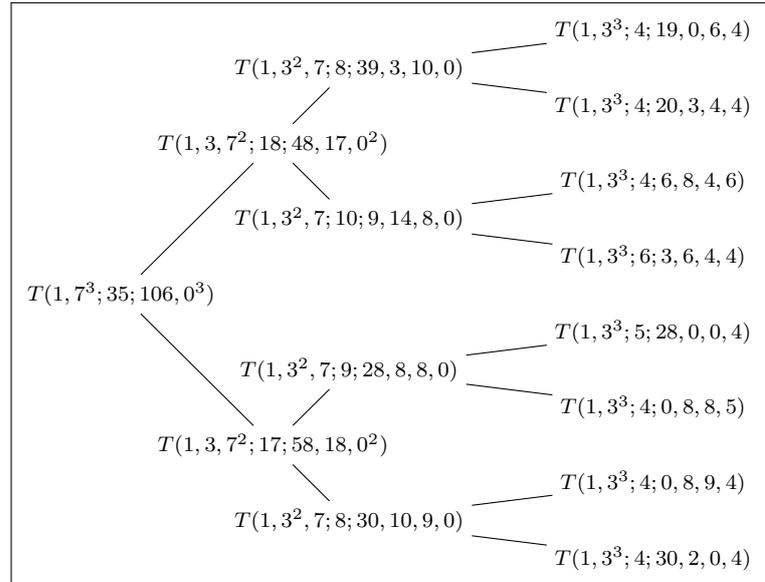


Figura 6.1: $T(1, 7, 7, 7; 35; 106, 0, 0, 0)$ è vera.

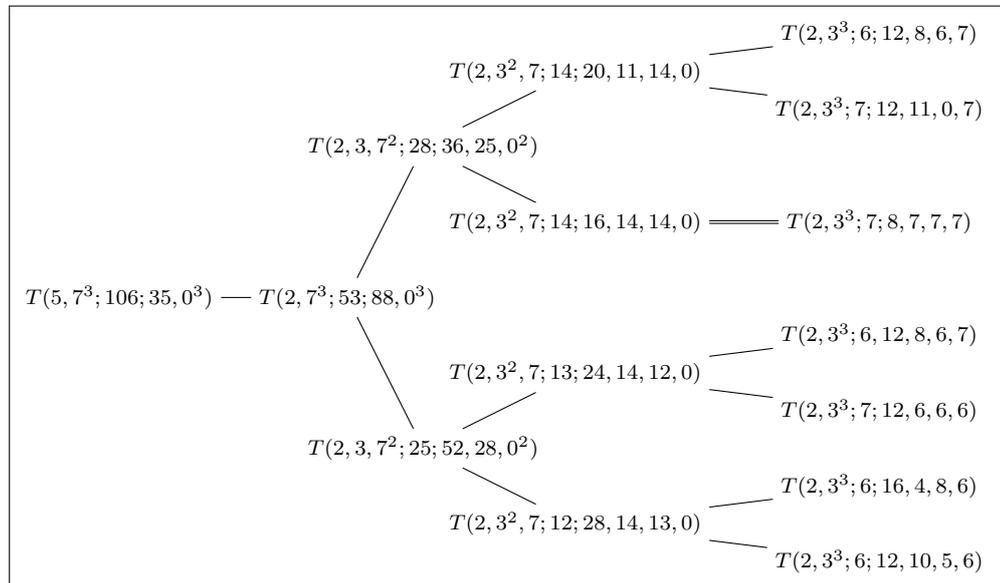


Figura 6.2: $T(5, 7, 7, 7; 106; 35, 0, 0, 0)$ è vera.

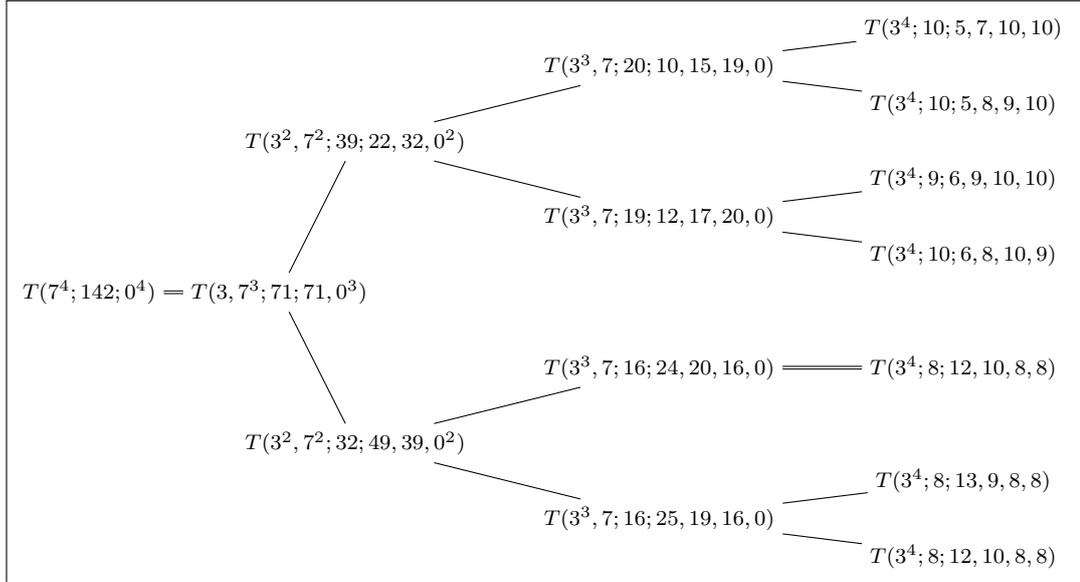


Figura 6.3: $T(7, 7, 7, 7; 142; 0, 0, 0, 0)$ è vera.

$\mathbb{P}^8 \times \mathbb{P}^8 \times \mathbb{P}^8 \times \mathbb{P}^8$

Per la varietà $(\mathbb{P}^8)^4$ si ha che l'ultima secante subabbondante è $\sigma_{198}((\mathbb{P}^8)^4)$, mentre la prima superabbondante è $\sigma_{199}((\mathbb{P}^8)^4)$. La Proposizione 6.2 garantisce che $\sigma_{198}((\mathbb{P}^8)^4)$ e $\sigma_{207}((\mathbb{P}^8)^4)$ sono non difettive. Si può osservare che non esiste una riduzione ammissibile per l'affermazione $T(8^4; 199; 0^4)$, che ha room $\mathcal{R} = -6$. Dimostriamo quindi il risultato seguente:

Proposizione 6.4. $\sigma_{200}((\mathbb{P}^8)^4)$ è non difettiva.

Dimostrazione. Consideriamo l'affermazione $T(8^4; 200; 0^4)$. In Figura 6.4 è rappresentato un albero di riduzione per questa affermazione. Tutte le foglie dell'albero eccetto $T(7^4; 135; 0^2, 7, 17)$ corrispondono ad affermazioni che possono essere ridotte applicando la Proposizione 2.11. Per mostrare che tali affermazioni sono vere è sufficiente fare una, o al massimo due, ulteriori riduzioni, e poi verificare la non difettività con il calcolo esplicito. Resta da mostrare che l'affermazione $T(7^4; 135; 0^2, 7, 17)$ è vera; questa si riduce a sua volta nelle due affermazioni $T(3, 7^3; 67; 68, 0, 3, 11)$ e $T(3, 7^3; 68; 67, 0, 4, 6)$. In Figura 6.5 e in Figura 6.6 sono riportati gli alberi di riduzione di queste affermazioni. Tutte le foglie degli alberi corrispondono ad affermazioni a cui può essere applicata la Proposizione 2.11, dando luogo ad affermazioni vere. \square

Grazie a questo risultato possiamo affermare che $\mathbb{P}^8 \times \mathbb{P}^8 \times \mathbb{P}^8 \times \mathbb{P}^8$ non ha secanti difettive eccetto al più $\sigma_{199}(X)$. In particolare si ha che $\mathbf{R}((\mathbb{P}^8)^4) = 199$ oppure $\mathbf{R}((\mathbb{P}^8)^4) = 200$.

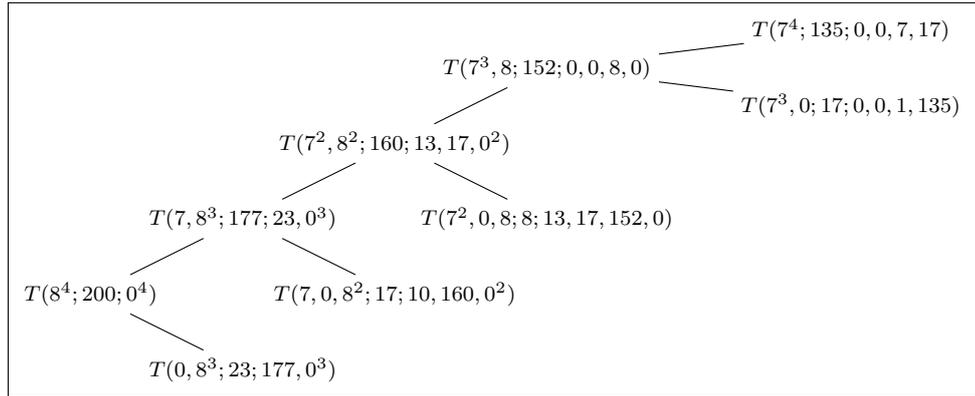


Figura 6.4: $T(8, 8, 8, 8; 200; 0, 0, 0, 0)$ è vera.

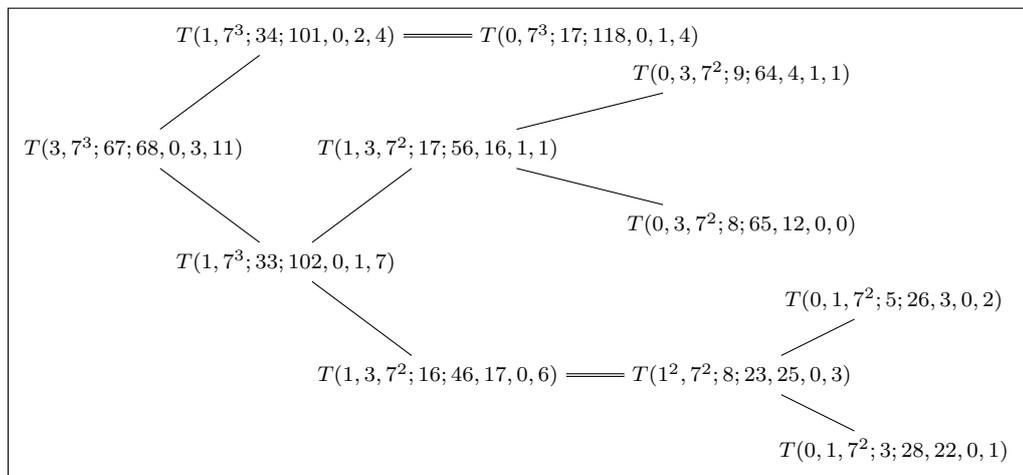


Figura 6.5: $T(3, 7, 7, 7; 67; 68, 0, 3, 11)$ è vera.

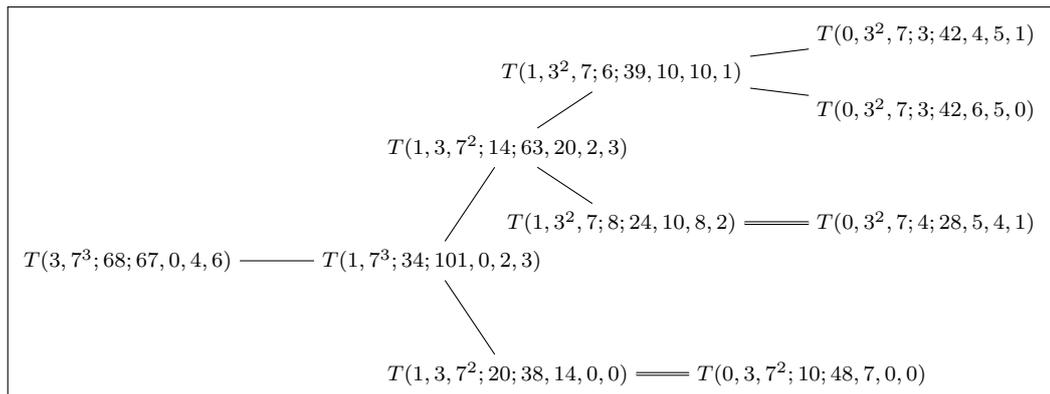


Figura 6.6: $T(3, 7, 7, 7; 68; 67, 0, 4, 6)$ è vera.

$\mathbb{P}^9 \times \mathbb{P}^9 \times \mathbb{P}^9 \times \mathbb{P}^9$

Consideriamo la varietà $(\mathbb{P}^9)^4$. In questo caso l'ultima secante subabbondante è la $\sigma_{270}((\mathbb{P}^9)^4)$, che è non difettiva per il Teorema 6.2, mentre la prima secante superabbondante è $\sigma_{271}((\mathbb{P}^9)^4)$. Il risultato seguente dimostra che questa varietà non ha secanti difettive:

Proposizione 6.5. $\sigma_{271}((\mathbb{P}^9)^4)$ è non difettiva.

Dimostrazione. Consideriamo l'affermazione $T(9^4; 271; 0^4)$. In Figura 6.7 è rappresentato un albero di riduzione per questa affermazione. Tutte le foglie, eccetto $T(5^4; 55; 4, 0, 4, 20)$, possono essere ridotte per due volte sul fattore \mathbb{P}^3 ottenendo da ciascuna di esse quattro affermazioni a cui può essere applicata la Proposizione 2.11. Una volta che ci si è ridotti a casi con con tre fattori, sono sufficienti una o al più due ulteriori riduzioni per ottenere affermazioni che possono essere verificate con il calcolo esplicito. Resta quindi da dimostrare che $T(5^4; 55; 4, 0, 4, 20)$ è vera. Questa affermazione può essere ridotta in $T(2, 5^3; 27; 3, 0, 2, 10)$ e $T(2, 5^3; 28; 31, 0, 2, 10)$. Tramite le riduzioni rappresentate negli alberi delle Figure 6.8 e 6.9 possiamo ottenere affermazioni relative alla varietà $(\mathbb{P}^2)^4$, che possono essere verificate con il calcolo esplicito. \square

Con questo risultato possiamo concludere che tutte le secanti di $(\mathbb{P}^9)^4$ sono non difettive. In particolare $\mathbf{R}((\mathbb{P}^9)^4) = 271$.

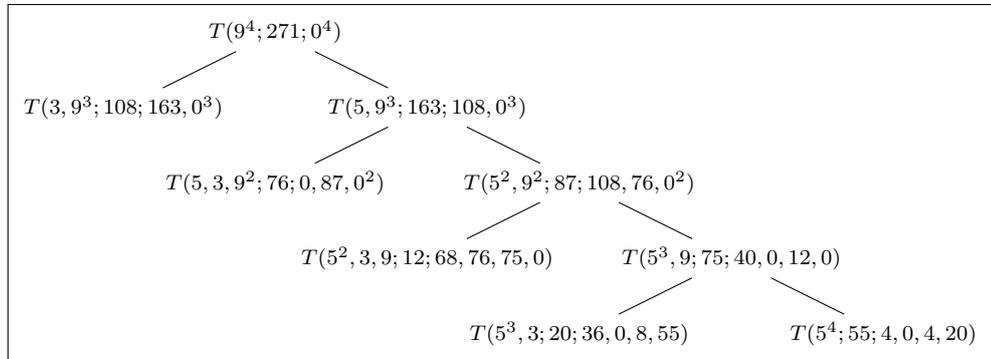


Figura 6.7: $T(9, 9, 9, 9; 271; 0, 0, 0, 0)$ è vera.

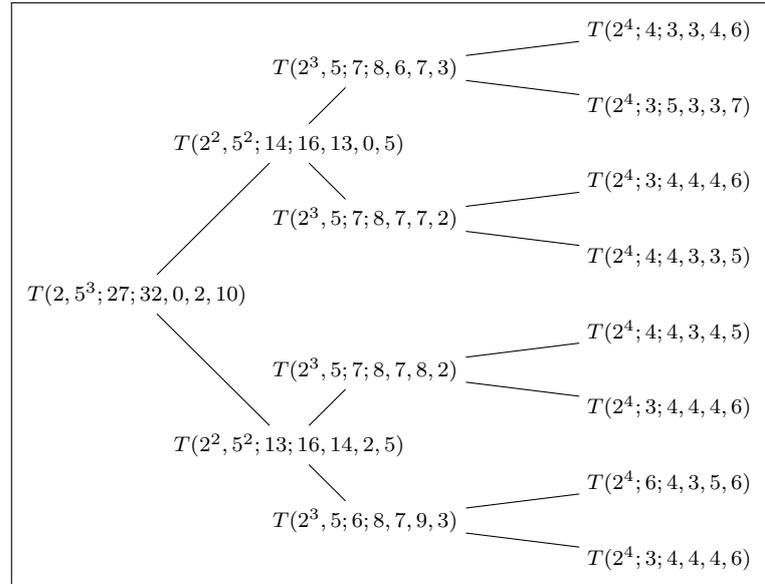


Figura 6.8: $T(2, 5, 5, 5; 27; 32, 0, 2, 10)$ è vera.

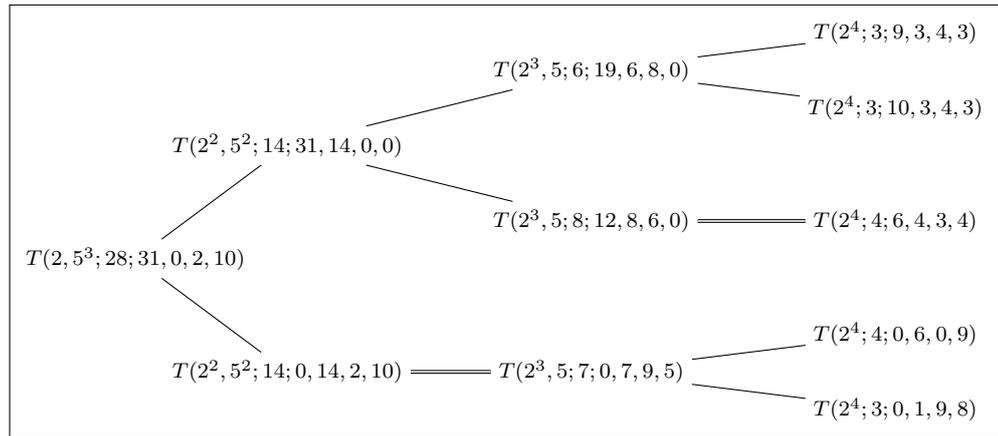


Figura 6.9: $T(2, 5, 5, 5; 28; 31, 0, 2, 10)$ è vera.

$\mathbb{P}^{10} \times \mathbb{P}^{10} \times \mathbb{P}^{10} \times \mathbb{P}^{10}$

Consideriamo la varietà $(\mathbb{P}^{10})^4$. L'ultima secante subabbondante di questa varietà è la $\sigma_{357}((\mathbb{P}^{10})^4)$, mentre la prima superabbondante è la $\sigma_{358}((\mathbb{P}^{10})^4)$. È facile verificare che l'affermazione $T(10^4; 357; 0^4)$, che ha room $\mathcal{R} = 4$ non ammette riduzioni ammissibili. Dimostriamo quindi la seguente proposizione:

Proposizione 6.6. $\sigma_{356}((\mathbb{P}^{10})^4)$ e $\sigma_{358}((\mathbb{P}^{10})^4)$ sono non difettive.

Dimostrazione. Per mostrare che $\sigma_{356}((\mathbb{P}^{10})^4)$ è non difettiva, consideriamo l'affermazione $T(10^4; 356; 0^4)$. Per questa affermazione possiamo costruire l'albero di riduzione rappresentato in Figura 6.10. Si può verificare facilmente che le affermazioni a cui può essere applicata la Proposizione 2.11 sono vere. Resta quindi da mostrare che è vera $T(9^3, 4; 123; 10, 11, 12, 146)$. Per questa possiamo costruire l'al-

bero di Figura 6.11. Tutte le foglie dell'albero corrispondono ad affermazioni vere e dunque si ottiene che $\sigma_{356}((\mathbb{P}^{10})^4)$ è non difettiva.

Per mostrare che $\sigma_{358}((\mathbb{P}^{10})^4)$ è non difettiva, consideriamo l'affermazione $T(10^4; 358; 0^4)$. In Figura 6.12 è rappresentata una riduzione di questa affermazione. È facile verificare che i termini a cui può essere applicata la Proposizione 2.11 corrispondono ad affermazioni vere. Per dimostrare che $T(9^4; 263; 0, 1, 6, 21)$ è vera, osserviamo che questa può essere ridotta nelle due affermazioni $T(4, 9^3; 131; 132, 0, 0, 15)$ e $T(4, 9^3; 132; 131, 1, 6, 6)$. In Figura 6.13 e in Figura 6.14 sono rappresentati due alberi di riduzione per queste affermazioni. Tutte le foglie degli alberi in questione corrispondono ad affermazioni vere, e dunque $T(10^4; 358; 0^4)$ è vera. \square

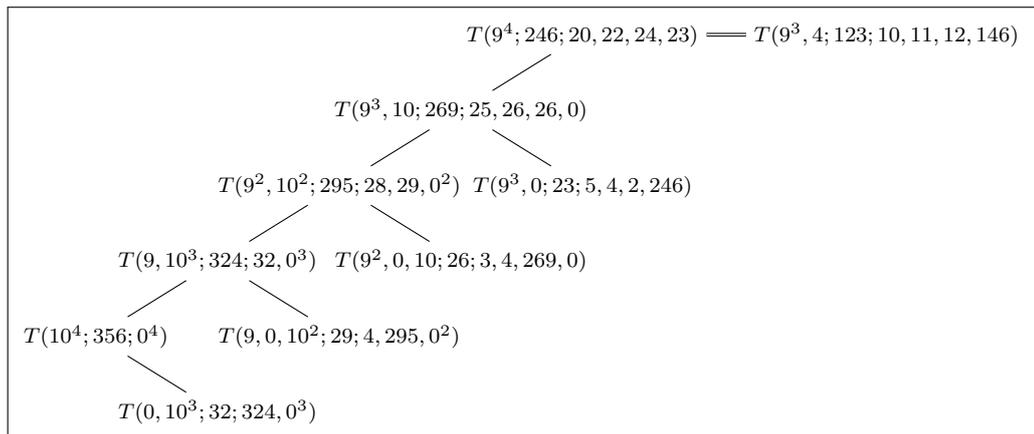


Figura 6.10: $T(10, 10, 10, 10; 356; 0, 0, 0, 0)$ è vera.

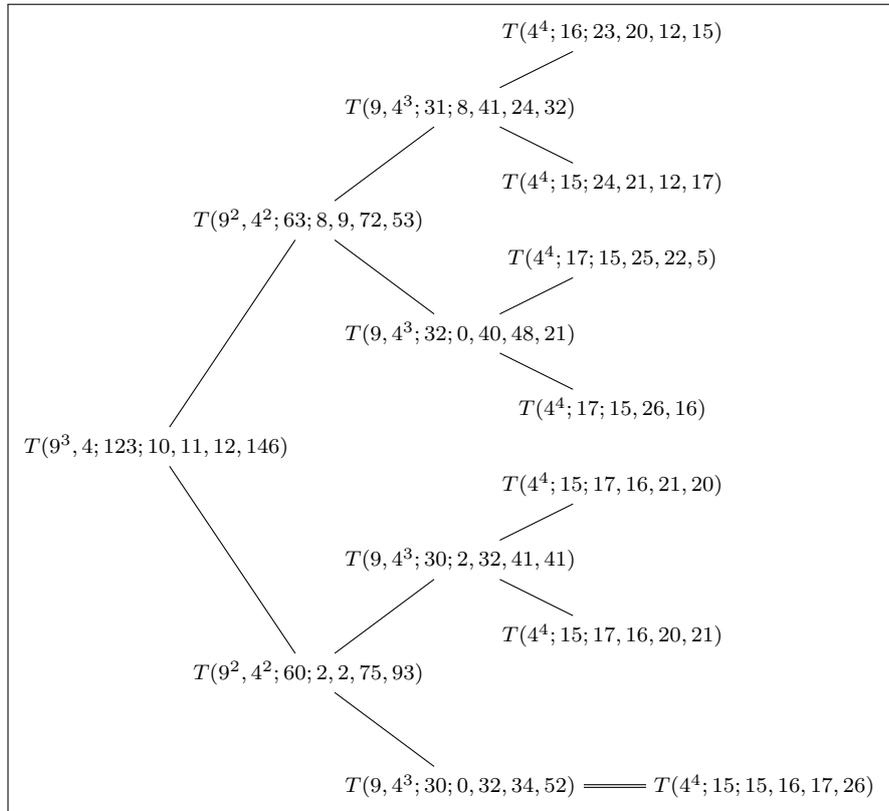


Figura 6.11: $T(9, 9, 9, 4; 123; 10, 11, 12, 146)$ è vera.

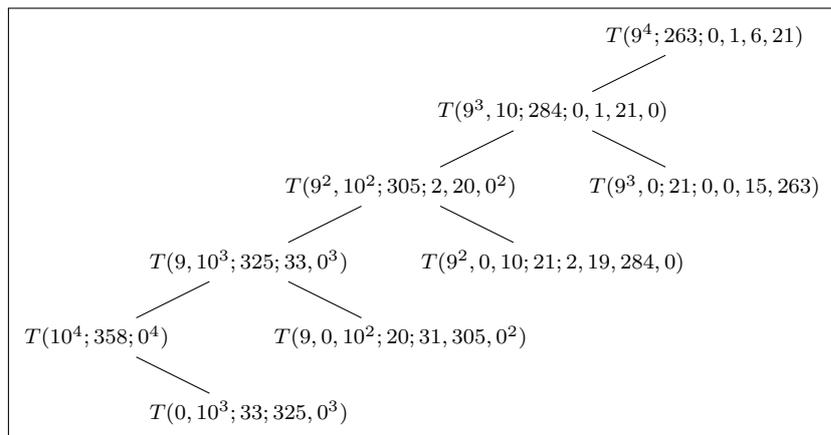


Figura 6.12: $T(10, 10, 10, 10; 358; 0, 0, 0, 0)$ è vera.

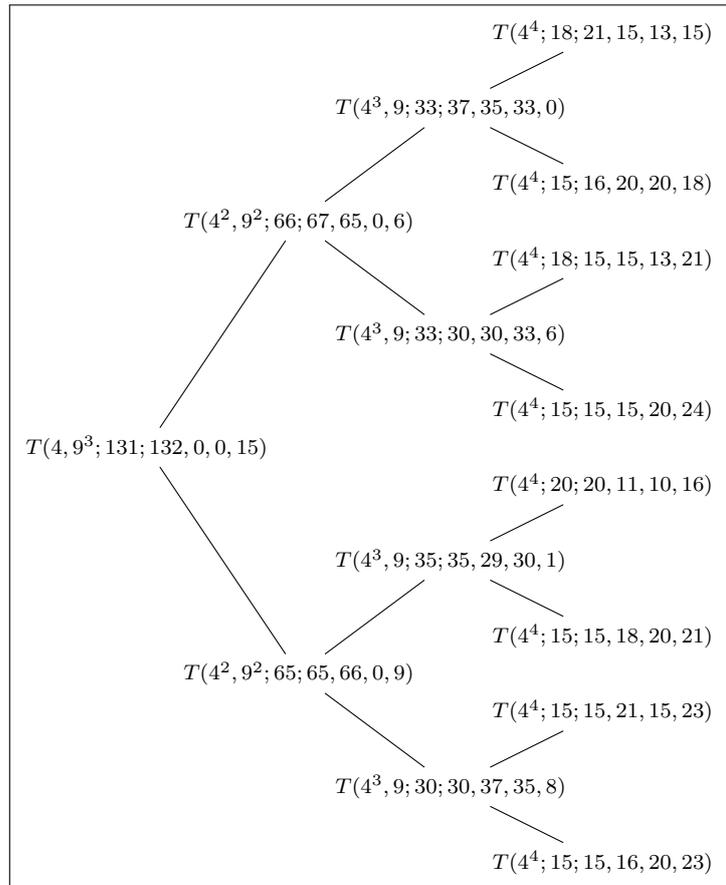


Figura 6.13: $T(4, 9, 9, 9; 131; 132, 0, 0, 15)$ è vera.

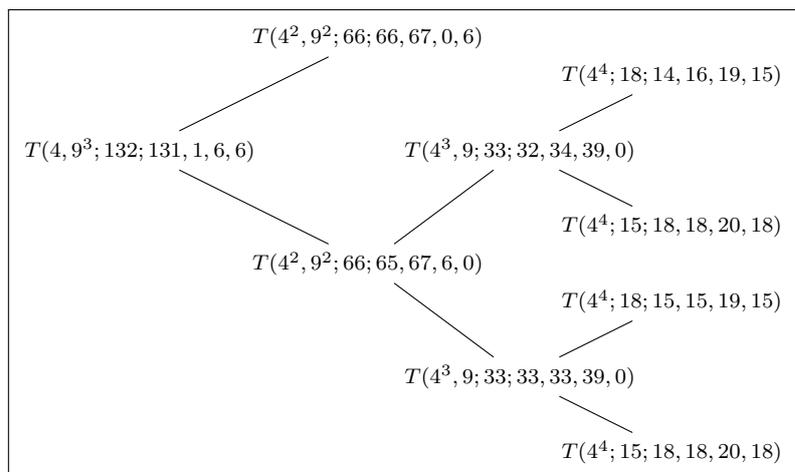


Figura 6.14: $T(4, 9, 9, 9; 132; 131, 1, 6, 6)$ è vera.

Capitolo 7

Considerazioni finali e spunti di approfondimento

In questo capitolo presentiamo alcuni risultati finali ottenuti con il calcolo esplicito; enunciamo quindi alcune congetture, che potrebbero forse essere dimostrate approfondendo le tecniche che abbiamo presentato nei capitoli precedenti. Infine proponiamo un approccio diverso con cui può essere affrontato il problema della ricerca di una riduzione proporzionata.

7.1 Calcolo della regione di sicurezza in dimensione bassa

Grazie al software Macaulay2 è stato possibile determinare gli estremi di sicurezza di alcune varietà di Segre di dimensione bassa, fino alla varietà $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$ nel caso con tre fattori, e fino a $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ nel caso con quattro fattori.

In Appendice A sono riportate in tabella le varietà analizzate, con i corrispondenti estremi di sicurezza nel caso superabbondante e nel caso subabbondante, e una 4-upla della forma $(s; a_1, a_2, a_3)$, oppure una 5-upla della forma $(s; a_1, a_2, a_3, a_4)$ (a seconda che si stia trattando una varietà con tre o con quattro fattori), che corrisponde a un'affermazione falsa con room massima in valore assoluto.

Nei casi analizzati abbiamo ottenuto che gli estremi di sicurezza sono sempre uno l'opposto dell'altro e che l'estremo di sicurezza positivo ha la forma seguente:

$$\mathcal{O}^* = \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1 \right) n_k. \quad (7.1)$$

Inoltre, almeno in alcuni dei casi analizzati, possiamo osservare che c'è una regolarità nelle affermazioni false che hanno room massima in valore assoluto. Per il caso subabbondante, la Proposizione 4.7, fornisce per ogni varietà di Segre un'affermazione falsa che ha room esattamente $\mathcal{O}^* - 1$. Nel caso superabbondante, si nota, nei casi analizzati, che se $n_k + 1 \leq \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1)$, allora l'affermazione

$$T\left(n_1, \dots, n_k; n_k; 0, \dots, 0, \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - (n_k + 1)\right)$$

ha room $-\mathcal{O}^* + 1$ ed è falsa.

I dati raccolti suggeriscono quindi la seguente congettura:

Congettura 7.1. *Sia $X = \mathbb{P}^1, \dots, \mathbb{P}^k$ una varietà di Segre con $n_1 \leq \dots \leq n_k$ e siano \mathcal{O}_- e \mathcal{O}_+ gli estremi della sua regione di sicurezza. Allora valgono le affermazioni seguenti:*

- *gli estremi di sicurezza sono uno l'opposto dell'altro, cioè: $\mathcal{O}_- = -\mathcal{O}_+$;*
- *l'estremo positivo è $\mathcal{O}_+ = \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1\right) n_k$;*
- *posto $a_k = \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - \sum_{i=1}^{k-1} n_i$, l'affermazione $T(n_1, \dots, n_k; 1; 0, \dots, 0, a_k)$, di room \mathcal{R} , verifica $\mathcal{R} = \mathcal{O}_+$ ed è falsa;*
- *se $a_k = \prod_{i=1}^{k-1} (n_i + 1) - (n_k + 1) \leq 0$, l'affermazione $T(n_1, \dots, n_k; n_k; 0, \dots, 0, a_k)$, di room \mathcal{R} , verifica $\mathcal{R} = \mathcal{O}_-$ ed è falsa.*

Inoltre i risultati parziali del Capitolo 6, suggeriscono la congettura seguente, già proposta in [AOP]:

Congettura 7.2. *Sia $X = (\mathbb{P}^n)^k$ una varietà di Segre in cui tutti i fattori hanno la stessa dimensione. Allora X non ha secanti difettive, eccetto nei due casi $(n, k) = (2, 3)$ e $(n, k) = (1, 4)$. In particolare, se $(n, k) \neq (2, 3)$ e $(n, k) \neq (1, 4)$, $\underline{\mathbf{R}}(X) = \left\lceil \frac{(n+1)^k}{nk+1} \right\rceil$.*

7.2 Un approccio diverso: la programmazione intera

Concludiamo impostando il problema aritmetico della ricerca di una riduzione proporzionata (cfr. Paragrafo 4.1) dal punto di vista della programmazione intera. Si tratterà solo il caso subabbondante; l'approccio nel caso superabbondante è analogo.

Consideriamo un'affermazione subabbondante $\mathcal{T} = T(\mathbf{n}, \mathbf{s}, \mathbf{a})$ di room $\mathcal{R} \geq 0$ relativa a una varietà di Segre X con k -fattori e supponiamo, una volta fissato n'_k (e di conseguenza n''_k), di voler determinare una riduzione sul k -esimo fattore. Indichiamo con γ' e γ'' rispettivamente i rapporti $\frac{n'_k+1}{n_k+1}$ e $\frac{n''_k+1}{n_k+1}$. In generale trovare una riduzione di \mathcal{T} significa determinare degli interi s', s'' e a'_i, a''_i (per $i = 1, \dots, k-1$) che diano luogo a due affermazioni $\mathcal{T}', \mathcal{T}''$, rispettivamente di room $\mathcal{R}', \mathcal{R}''$, che soddisfano le relazioni imposte dal Teorema 2.7; in particolare, affinché la riduzione sia ammissibile, si deve avere $\mathcal{R}', \mathcal{R}'' \geq 0$. È chiaro che una volta determinati s' o uno qualunque degli a'_i , immediatamente sarà determinato anche s'' o il corrispondente a''_i . Inoltre, nell'ottica di trovare una riduzione proporzionata, si vuole rendere minima (in valore assoluto) la differenza $\mathcal{R}' - \gamma' \mathcal{R}$, e di conseguenza anche il suo opposto $\mathcal{R}'' - \gamma'' \mathcal{R}$.

Questo problema può essere affrontato con le tecniche della programmazione intera: si vuole minimizzare la funzione $|\mathcal{R}' - \gamma'\mathcal{R}|$ al variare di $(s', a'_1, \dots, a'_{k-1})$ in un insieme P definito da alcuni vincoli. Per determinare esplicitamente tali vincoli consideriamo le scritture di \mathcal{R} e \mathcal{R}' con il k -esimo fattore in evidenza (con ρ indichiamo il termine $\left[\prod_{i=1}^{k-1}(n_i + 1) + s + a_k\right]$, il cui valore non varia durante la riduzione):

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= (n_k + 1)\rho - s \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i \right) - \sum_{i=1}^{k-1} a_i(n_i + 1), \\ \mathcal{R}' &= (n'_k + 1)\rho - s' \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i \right) - \sum_{i=1}^{k-1} a'_i(n_i + 1).\end{aligned}$$

Ovviamente si dovrà avere che $s', a'_1, \dots, a'_{k-1}$ sono interi positivi. Inoltre, per poter definire il secondo termine della riduzione si avrà che $s' \in [0, s]$ e $a'_i \in [0, a_i]$ per ogni $i = 1, \dots, k-1$, in modo che anche s'' e a''_i siano positivi. Poiché $\mathcal{R}' + \mathcal{R}'' = \mathcal{R}$ si può imporre che la differenza $\mathcal{R}' - \gamma'\mathcal{R}$ sia positiva. Questo vincolo, apparentemente superfluo, ci permette di evitare di inserire il valore assoluto nella scrittura della funzione da minimizzare. Infine si dovrà imporre che \mathcal{R}' e \mathcal{R}'' siano positive. Per alleggerire la scrittura, riformuliamo il problema con delle notazioni diverse.

Dati $2u + 1$ interi positivi $A, B_1, \dots, B_u, L_1, \dots, L_u$ tali che $A - \sum B_i L_i \geq 0$ e un valore $\gamma \in (0, 1)$, si vuole risolvere il seguente problema di minimo vincolato:

$$\begin{aligned}\min \quad & \{f(\lambda_1, \dots, \lambda_u) = \sum (\gamma L_i - \lambda_i) B_i\} \\ & \begin{cases} \lambda_i \in \mathbb{Z} & \text{per } i = 1, \dots, u \\ \gamma A - \sum \lambda_i B_i \geq 0 \\ \gamma A - \sum (L_i - \lambda_i) B_i \geq 0 \\ \sum (\gamma L_i - \lambda_i) B_i \geq 0 \\ 0 \leq \lambda_i \leq L_i & \text{per } i = 1, \dots, u. \end{cases}\end{aligned}$$

L'intero A corrisponde al valore $(n_k + 1)\rho$, i termini B_i ai coefficienti costanti $\sum_{i=1}^{k-1} n_i + 1$ (per $j = 1, \dots, k-1$), i termini L_i corrispondono ai valori s e a_j (per $j = 1, \dots, k-1$) e le incognite λ_i ai valori s' e a'_j da determinare. Infine il valore γ corrisponde al rapporto γ' della riduzione. I cinque vincoli indicano rispettivamente: l'integralità dei termini che definiscono \mathcal{T}' , la positività di \mathcal{R}' , la positività di \mathcal{R}'' , il vincolo ausiliario $\mathcal{R}' - \gamma'\mathcal{R} \geq 0$, e infine la positività dei termini s'' e a''_j (e quindi la possibilità di poter definire la seconda affermazione).

Riformuliamo il problema in forma di problema massimo, indichiamo i vincoli in forma matriciale ed eliminiamo la costante additiva dalla funzione obiettivo:

$$\begin{aligned}\max \quad & \{g(\lambda_1, \dots, \lambda_u) = \sum \lambda_i B_i\} \\ & \begin{cases} \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{Z}^u \\ \mathcal{A}\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{b}. \end{cases}\end{aligned}$$

dove \mathcal{A} e \mathbf{b} sono della forma seguente:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} B_1 & \dots & B_u \\ -B_1 & \dots & -B_u \\ B_1 & \dots & B_u \\ & \mathbf{I}_u & \\ & -\mathbf{I}_u & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \gamma A \\ \gamma A - \sum L_i B_i \\ \sum \gamma L_i B_i \\ L_1 \\ \vdots \\ L_u \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché stiamo considerando casi subabbondanti, si ha che $\mathcal{R} \geq 0$ e dunque $\gamma A \geq \gamma \sum L_i B_i$. Questo rende superflua la prima equazione dei vincoli. Considerando questo fatto, riscriviamo quindi \mathcal{A} e \mathbf{b} , mantenendo per semplicità le stesse notazioni:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -B_1 & \dots & -B_u \\ B_1 & \dots & B_u \\ & \mathbf{I}_u & \\ & -\mathbf{I}_u & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \gamma A - \sum L_i B_i \\ \sum \gamma L_i B_i \\ L_1 \\ \vdots \\ L_u \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

dove \mathcal{A} è una matrice $2(u+1) \times u$ e \mathbf{b} è un vettore di $\mathbb{C}^{2(u+1)}$.

Un problema di questa forma è detto problema intero; il problema che si ottiene considerando la stessa funzione e gli stessi vincoli, ma senza il vincolo intero λ è detto problema rilassato. Chiaramente la soluzione ottimale del problema rilassato è data da $\lambda_i = \gamma L_i$. Se questi valori sono interi questa è la soluzione ottimale anche per il problema intero. Questa è, ad esempio, la situazione che si verifica quando n_k è dispari e s e tutti gli a_i sono pari e si applica una riduzione centrale sul k -esimo fattore (che corrisponde a $\gamma = \frac{1}{2}$): in tal caso l'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ si riduce in due copie di una stessa affermazione $T(\mathbf{n}', s', \mathbf{a}')$.

In generale tuttavia la soluzione del problema rilassato non è ammissibile per il vincolo $\lambda \in \mathbb{Z}^u$. Alcuni risultati di programmazione intera (cfr. [KV] e [W]) garantiscono che la soluzione del problema intero non sia troppo lontana dalla soluzione del problema rilassato.

Lo studio di questi risultati, può portare a un algoritmo efficiente per trovare riduzioni ottimali, e forse può determinare classi di affermazioni che ammettono riduzioni per cui valgono stime migliori di quelle fornite dal Teorema 4.6.

Appendice A

Raccolta delle tabelle

Casi con tre fattori

Varietà	Estremi di sicurezza	Casi estremali
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$		
	-1	(1; 0, 0, 2)
	+1	(1; 0, 0, 2)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$		
	-2	(2; 0, 0, 1)
	+2	(1; 0, 0, 2)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$		
	-4	(2; 0, 0, 3)
	+4	(1; 0, 0, 3)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$		
	-6	(2; 0, 0, 6)
	+6	(1; 0, 0, 5)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$		
	-3	(0; 0, 3, 3)
	+3	(1; 0, 0, 2)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$		
	-6	(3; 0, 0, 2)
	+6	(1; 0, 0, 3)

Varietà	Estremi di sicurezza	Casi estremali
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$		
	-9	(0; 0, 3, 7)
	+9	(1; 0, 0, 4)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$		
	-9	(3; 0, 0, 5)
	+9	(1; 0, 0, 5)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$		
	-12	(3; 0, 0, 8)
	+12	(1; 0, 0, 7)
$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$		
	-15	(3; 0, 0, 12)
	+15	(1; 0, 0, 10)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4$		
	-4	(0; 0, 4, 3)
	+4	(0; 0, 1, 3)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4$		
	-8	(0; 0, 4, 5)
	+8	(0; 0, 1, 4)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4$		
	-12	(0; 0, 1, 5)
	+12	(0; 0, 4, 7)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$		
	-16	(0; 0, 1, 6)
	+16	(0; 0, 4, 9)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4$		
	-12	(4; 0, 0, 4)
	+12	(1; 0, 0, 5)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4$		
	-16	(4; 0, 0, 7)
	+16	(1; 0, 0, 7)

Varietà	Estremi di sicurezza	Casi estremali
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$		
	-20	(4; 0, 0, 10)
	+20	(1; 0, 0, 9)
$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4$		
	-20	(4; 0, 0, 11)
	+20	(1; 0, 0, 10)
$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$		
	-24	(4; 0, 0, 15)
	+24	(1; 0, 0, 13)
$\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$		
	-28	(4; 0, 0, 20)
	+28	(1; 0, 0, 17)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5$		
	-5	(0; 0, 5, 3)
	+5	(1; 0, 1, 3)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5$		
	-10	(0; 0, 5, 5)
	+10	(1; 0, 0, 3)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^5$		
	-15	(0; 0, 5, 7)
	+15	(0; 0, 7, 1)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^5$		
	-20	(0; 0, 5, 9)
	+20	(0; 0, 7, 1)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$		
	-25	(0; 0, 5, 11)
	+25	(1; 0, 0, 6)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5$		
	-15	(5; 0, 0, 3)
	+15	(1; 0, 0, 5)

Varietà	Estremi di sicurezza	Casi estremali
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^5$		
	-20	(5; 0, 0, 6)
	+20	(1; 0, 0, 7)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^5$		
	-25	(5; 0, 0, 9)
	+25	(1; 0, 0, 9)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$		
	-30	(5; 0, 0, 12)
	+30	(1; 0, 0, 11)
$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^5$		
	-25	(5; 0, 0, 10)
	+25	(1; 0, 0, 10)
$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^5$		
	-30	(5; 0, 0, 14)
	+30	(1; 0, 0, 13)
$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$		
	-35	(5; 0, 0, 18)
	+35	(1; 0, 0, 16)
$\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^5$		
	-35	(5; 0, 0, 19)
	+35	(1; 0, 0, 17)
$\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$		
	-40	(5; 0, 0, 24)
	+40	(1; 0, 0, 21)
$\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$		
	-45	(5; 0, 0, 30)
	+45	(1; 0, 0, 26)

Casi con quattro fattori

Varietà	Estremi di sicurezza	Casi estremali
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$		
	-2	(1; 0, 0, 6)
	+2	(1; 0, 0, 5)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$		
	-4	(2; 0, 0, 5)
	+4	(1; 0, 0, 5)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$		
	-6	(2; 0, 0, 9)
	+6	(1; 0, 0, 8)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$		
	-8	(2; 0, 0, 15)
	+8	(1; 0, 0, 13)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$		
	-10	(2; 0, 0, 24)
	+10	(1; 0, 0, 21)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$		
	-6	(3; 0, 0, 4)
	+6	(1; 0, 0, 5)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$		
	-9	(3; 0, 0, 8)
	+9	(1; 0, 0, 8)

Varietà	Estremi di sicurezza	Casi estremali
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$		
	-12	(3; 0, 0, 12)
	+12	(1; 0, 0, 11)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$		
	-12	(3; 0, 0, 14)
	+12	(1; 0, 0, 13)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$		
	-15	(3; 0, 0, 20)
	+15	(1; 0, 0, 18)
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$		
	-18	(3; 0, 0, 28)
	+18	(1; 0, 0, 25)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$		
	-15	(3; 0, 0, 23)
	+15	(1; 0, 0, 21)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$		
	-18	(3; 0, 0, 32)
	+18	(1; 0, 0, 29)
$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$		
	-21	(3; 0, 0, 44)
	+21	(1; 0, 0, 40)
$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$		
	-24	(3; 0, 0, 60)
	+24	(1; 0, 0, 55)

Appendice B

Script di Macaulay2

Uno strumento fondamentale utilizzato in questo lavoro è il software Macaulay2 (cfr. [GS]), con il quale è stato possibile calcolare esplicitamente la dimensione dello spazio L della Definizione 2.1, e dunque determinare la validità o la non validità dell'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ corrispondente. In questa appendice riportiamo lo script utilizzato, del tutto simile a quello che usato per i calcoli espliciti di [AOP]. Data un'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$, si sfrutta il Lemma di Terracini per determinare la dimensione dello spazio tangente alla secante parziale corrispondente (cfr. Osservazione 2.4), scegliendo casualmente $s + \sum a_i$ punti della varietà di Segre. Per questo motivo, se la dimensione dello spazio calcolato è quella aspettata, allora si può dedurre che $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ è valida, mentre se la dimensione calcolata è più bassa di quella aspettata, non è possibile concludere con certezza che $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$ sia falsa, in quanto la scelta casuale dei punti potrebbe aver portato a una situazione singolare.

Riportiamo il programma utilizzato per affermazioni relative a varietà di Segre con tre fattori, che prende in entrata il campo $\mathbb{K}\mathbb{K}$, i valori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, corrispondenti alle dimensioni dei fattori della Segre e i valori $\mathbf{s}, \mathbf{pp}, \mathbf{qq}, \mathbf{rr}$, corrispondenti rispettivamente a s, a_1, a_2, a_3 dell'affermazione $T(\mathbf{n}, s, \mathbf{a})$. È facile modificare leggermente il programma in modo da trattare casi con un numero superiore di fattori.

```
R=KK[x_0..x_a,y_0..y_b,z_0..z_c, MonomialOrder=>{a+1,b+1,c+1}];
xyz=matrix{{x_0..x_a}}**matrix{{y_0..y_b}}**matrix{{z_0..z_c}};

for i from 1 to s+pp+qq+rr do (p_i=apply(a+1,j->random(KK)),
  q_i=apply(b+1,j->random(KK)), r_i=apply(c+1,j->random(KK)))

for h from 1 to s+pp do
  ruleyz_h=toList(set(apply(b+1,j->(y_j=>(q_h)_j)))+
  set(apply(c+1,j->(z_j=>(r_h)_j))))
for h from 1 to s do
  rulexz_h=toList(set(apply(a+1,j->(x_j=>(p_h)_j)))+
  set(apply(c+1,j->(z_j=>(r_h)_j))))
for h from s+pp+1 to s+pp+qq do
  rulexz_h=toList(set(apply(a+1,j->(x_j=>(p_h)_j)))+
```

```

    set(apply(c+1,j->(z_j=>(r_h)_j))))
for h from 1 to s do
    rulexy_h=toList(set(apply(a+1,j->(x_j=>(p_h)_j)))+
    set(apply(b+1,j->(y_j=>(q_h)_j))))
for h from s+pp+qq+1 to s+pp+qq+rr do
    rulexy_h=toList(set(apply(a+1,j->(x_j=>(p_h)_j)))+
    set(apply(b+1,j->(y_j=>(q_h)_j))))

if s+pp>0 then j=sub(diff(transpose matrix{{x_0..x_a}},xyz),ruleyz_1)
    else j=matrix mutableMatrix(R,0,(a+1)*(b+1)*(c+1));

for h from 2 to s+pp do
    j=j||sub(diff(transpose matrix{{x_0..x_a}},xyz),ruleyz_h)
for h from 1 to s do
    j=j||sub(diff(transpose matrix{{y_0..y_b}},xyz),rulexz_h)
for h from s+pp+1 to s+pp+qq do
    j=j||sub(diff(transpose matrix{{y_0..y_b}},xyz),rulexz_h)
for h from 1 to s do
    j=j||sub(diff(transpose matrix{{z_0..z_c}},xyz),rulexy_h)
for h from s+pp+qq+1 to s+pp+qq+rr do
    j=j||sub(diff(transpose matrix{{z_0..z_c}},xyz),rulexy_h)

rj=rank j;

AMB= (a+1)*(b+1)*(c+1);
EXP = s*(a+b+c+1)+pp*(a+1)+qq*(b+1)+rr*(c+1);
ROOM = AMB-EXP;

if rj!=min(EXP,AMB) then print { (a,b,c, s,pp,qq,rr ), "is false."}
    else print { (a,b,c, s,pp,qq,rr ), "is true."}
print {(AMB,EXP, "ROOM", ROOM)}

```

Bibliografia

- [AOP] H. Abo, G. Ottaviani, C. Peterson: *Induction for Secant Varieties of Segre Varieties*. Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009) 767-792.
- [BCS] P. Bürgisser, M. Clausen, M.A. Shokrollahi: *Algebraic Complexity Theory*. Springer, Berlino, 1997.
- [F] W. Fulton: *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. Benjamin, Reading (Massachusetts), 1969.
- [GKZ] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky: *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. Birkhäuser, Boston, 1994.
- [GS] D. Grayson, M. Stillman: *MACAULAY2: Software per la ricerca in geometria algebrica e algebra commutativa*. Disponibile su <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>
- [Hj] J. Harris: *Algebraic Geometry: A First Course*. Springer, New York, 1992.
- [Hr] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*. Springer, New York, 1977.
- [KV] B. Korte, J. Vygen: *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*. Springer, Berlino, 2000.
- [La] J.M. Landsberg: *Tensors: geometry and applications*. American Mathematical Society, Providence, 2011.
- [Li1] T. Lickteig: *Typical Tensorial Rank*. Linear Algebra Appl. 69 (1985) 95-120.
- [Li2] T. Lickteig: *Untersuchungen zum Tensorrangproblem*. Dissertazione della Tesi di Dottorato, Università di Costanza, 1982.
- [Sh] I.R. Shafarevich: *Basic Algebraic Geometry*. Springer, Berlino, 1977.
- [St] V. Strassen: *Rank and optimal computation of generic tensors*. Linear Algebra Appl. 52 (1983) 645-685.
- [W] L. Wolsey: *Integer Programming*. J.Wiley, New York, 1998.